



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Departamento de Ingeniería Mecánica

PROYECTO FIN DE GRADO

Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras semielípticas con forma cóncava contenidas en un eje circular

Autora: Yaiza Sanz Ugena

Directora de proyecto: Patricia Rubio Herrero

Leganés, junio de 2015

PROYECTO FIN DE GRADO

Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras semielípticas con forma cóncava contenidas en un eje circular

Autora:

Yaiza Sanz Ugena

Directora de proyecto:

Patricia Rubio Herrero

Tribunal Calificador:

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Grado el día __ de _____ de 20__
en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, el Tribunal
acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

Presidente

Vocal

Secretario

“La felicidad de una persona se mide por las ganas de perseguir sus sueños”

Héctor de Anta

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres la oportunidad que me han dado desde pequeña de poder formarme con la mejor educación. Por el cariño, el respeto y el apoyo incondicional que me han entregado a lo largo de toda mi vida. Sin ellos no podría haber llegado hasta aquí.

A la profesora María Belén Muñoz Abella por haberme dado la oportunidad de realizar este Trabajo Fin de Grado con la profesora Patricia Rubio, quien me ha ofrecido su ayuda en todo momento. Gracias, de verdad, por la paciencia y dedicación constante que me has entregado.

A mi hermana por compartir tantas y tantas noches en vela de estudio y esfuerzo. Gracias por haber hecho esos momentos tan especiales.

Al resto de mi familia por confiar en mí y motivarme siempre para seguir adelante.

A mis amigas por saber sacarme siempre una sonrisa en esos momentos de debilidad en los que lo necesitas y por haberme mostrado su apoyo en todo momento.

A todas las personas que he conocido a lo largo de la carrera y que hoy en día se han convertido en una parte muy importante de mi vida. Gracias por haberme apoyado a lo largo de estos cinco años.

A Héctor por la infinita paciencia, por creer en mí y darme las fuerzas necesarias para continuar. Gracias de corazón.

Resumen

En este Trabajo Fin de Grado se ha obtenido una expresión que permite determinar el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) a lo largo del frente de una fisura semielíptica con forma cóncava contenida en un eje circular estático, en función de las características de la fisura, profundidad y forma, y de la posición relativa en el frente de la misma.

Para ello, mediante el Método de Elementos Finitos, se ha desarrollado un modelo numérico a partir del cual se han obtenido los valores del FIT a lo largo del frente de la fisura sometida a flexión. Los resultados obtenidos se han comparado y validado con otros recogidos en la literatura.

Abstract

In the present Final Project a general expression that gives the Stress Intensity Factor (SIF) along the crack front of a semi-elliptical crack with concave shape in a static circular shaft in terms of the crack depth ratio, crack aspect ratio and place ratio.

Therefore, using the Finite Elements Method (FEM) a numerical study has been made. The model provides the SIF values along the crack frontal of a crack under bending stress. The numerical results has been compared and validated with others obtained from the literature. It has been found that they are in good agreement.

Índice

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Introducción	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Estructura del trabajo	3
2	ESTADO DEL ARTE	5
2.1	Conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura	6
2.1.1.	Planteamiento local de la fractura	6
2.1.2.	Planteamiento global de la fractura	9
2.2	Tipología de fisuras en ejes	10
2.3	Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en ejes fisurados	11
2.3.1	Ejes con fisuras de frente recto.....	11
2.3.2	Ejes con fisuras de frente semielíptico	11
3	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	17



3.1	Introducción al método de elementos finitos	18
3.2	Conceptos básicos del método	18
3.3	Método de elementos finitos con “Abaqus 6.11”	20
4	MODELO NUMÉRICO	23
4.1	Modelo geométrico	24
4.1.1	Planteamiento del problema	24
4.2	Modelo numérico	26
4.2.1	Geometría del modelo	26
4.2.2	Propiedades del material	27
4.2.3	Ensamblaje del modelo	27
4.2.4	Contactos entre superficies.....	28
4.2.5	Cargas y condiciones de apoyo	29
4.2.6	Mallado del modelo.....	29
4.2.7	Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones	30
4.2.8	Análisis de resultados y discusión.....	31
4.2.9	Validación del modelo	35
4.2.9.1	Shin y Cai [46]	35
4.2.9.2	Carpinteri [11].....	36
5	EXPRESIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES.....	39
5.1	Obtención de la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones.....	40
5.2	Validación de la expresión del FIT	40



5.2.1	Error medio relativo	42
6	PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO	45
6.1	Planificación.....	46
6.2	Presupuesto	47
6.2.1	Amortización de equipos y licencias de <i>software</i>	48
6.2.2	Retribución del personal.....	48
7	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS	51
1.1	Resumen final y conclusiones	52
1.2	Trabajos futuros.....	53
	Bibliografía	55
A	COEFICIENTES DEL AJUSTE POLINÓMICO	61

Índice de Figuras

Figura 2.1: Modos básicos de fractura: a) Modo I o de apertura, b) Modo II o de cortadura, c) Modo III o de cizalladura [1]	7
Figura 2.2: Sistema de coordenadas en el extremo de una fisura y componentes del tensor de tensiones [43]	8
Figura 2.3: Tipología de la fisura: a) Fisura de frente recto; b) Fisura de frente semielíptico convexo; c) Fisura de frente semielíptico cóncavo	10
Figura 2.4: Sección transversal de la zona fisurada de un eje y parámetros característicos de una fisura semielíptica con forma convexa.....	12
Figura 2.5: Sección transversal de la zona fisurada de un eje y parámetros característicos de una fisura semielíptica con forma cóncava	13
Figura 3.1: Esquema de un sistema en análisis [7].....	19
Figura 3.2: Esquema de los componentes de un modelo en Abaqus.....	21
Figura 4.1: Esquema del eje fisurado	24
Figura 4.2: Esquema de la profundidad relativa α y del factor de forma β de la fisura	25
Figura 4.3: Detalle de la sección fisurada y posición relativa en el frente de la fisura γ	25
Figura 4.4: Mitad del eje de estudio.....	26



Figura 4.5: Particiones transversales de la barra	27
Figura 4.6: Ensamblaje de las dos barras	27
Figura 4.7: Detalle de los contactos en la zona intacta para $\beta = 0.75$	28
Figura 4.8: Eje biapoyado sometido a flexión pura.....	29
Figura 4.9: Detalle de la malla del eje en la sección transversal para $\beta = 0.75$	30
Figura 4.10: Detalle de la malla del eje en la sección fisurada	30
Figura 4.11: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0$	31
Figura 4.12: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.25$	31
Figura 4.13: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.5$	32
Figura 4.14: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.75$	32
Figura 4.15: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 1$	33
Figura 4.16: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.1$	33
Figura 4.17: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.4$	34
Figura 4.18: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.8$	34
Figura 4.19: Comparación del FIT adimensionalizado del presente modelo y de Shin y Cai [46] en función de la posición relativa en el frente para $\beta = 0$ y todos los valores de profundidad de fisura.....	36
Figura 4.20: Comparación del FIT adimensionalizado del presente modelo y de Carpinteri [11] en función de la profundidad relativa para todos los valores del factor de forma	37



Figura 5.1: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.1$	41
Figura 5.2: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.4$	41
Figura 5.3: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.8$	42
Figura 6.1: Diagrama de Gantt correspondiente a las tareas planificadas.....	47

Índice de Tablas

Tabla 4.1.1: Propiedades del aluminio utilizadas	24
Tabla 5.2.1: Error medio relativo (%)	43
Tabla 5.2.2: Promedio de las diferencias existentes entre el valor del F_I obtenido mediante el ajuste y el obtenido numéricamente	43
Tabla 6.1.1: Planificación de tareas	46
Tabla 6.2.1: Coste de amortización de equipos y licencias utilizados	48
Tabla 6.2.2: Coste del personal involucrado en el proyecto	48
Tabla A.1: Coeficientes C_{ijk} de la ecuación 5.1.3	62
Tabla A.2: Continuación coeficientes C_{ijk} de la ecuación 5.1.3	63

Glosario

<i>FIT</i>	Factor de Intensidad de Tensiones
<i>MFEL</i>	Mecánica de la Fractura Elástica Lineal
<i>MEF</i>	Método de Elementos Finitos
<i>MEC</i>	Método de Elementos de Contorno
σ_{xx}	Tensión normal al plano yz
σ_{yy}	Tensión normal al plano xz
σ_{zz}	Tensión normal al plano xy
σ_{ij}	Componente del tensor de tensiones
τ_{xy}	Tensión tangencial paralela al eje y
τ_{zx}	Tensión tangencial paralela al eje x
τ_{yz}	Tensión tangencial paralela al eje z
u_x	Desplazamiento en dirección x
u_y	Desplazamiento en dirección y
u_z	Desplazamiento en dirección z
u_i	Componente del tensor de deformaciones
r	Distancia entre el origen y el punto en coordenadas polares
θ	Ángulo de rotación
ν	Coefficiente de Poisson
G	Módulo de elasticidad
σ	Tensión de referencia
K_I	Factor de Intensidad de Tensiones
F_I	Factor de corrección adimensional
K_{IC}	Tenacidad a la fractura
G	Tasa de liberación de energía



F	Trabajo realizado por fuerzas externas
U	Energía de deformación
D	Diámetro del eje
O	Centro de la elipse
a	Semieje menor de la elipse de forma convexa
a'	Semieje menor de la elipse de forma cóncava
b	Semieje mayor de la elipse de forma convexa
b	Semieje mayor de la elipse de forma cóncava
h	Distancia del centro del eje al punto del frente de la fisura situado en el contorno exterior del eje
ω	Distancia del centro del eje a un punto cualquiera del frente de la fisura
α	Profundidad relativa de la fisura
β	Factor de forma de la fisura semielíptica de forma convexa
β'	Factor de forma de la fisura semielíptica de forma cóncava
γ	Posición relativa en el frente de la fisura
C_{ijk}	Coefficientes del ajuste polinómico
i	Grado del polinomio de la variable α
j	Grado del polinomio de la variable β
k	Grado del polinomio de la variable γ
R^2	Coefficiente del ajuste
ε_{KI}	Error medio relativo
$F_{I,EXP}$	Valor del F_I obtenido mediante la expresión
$F_{I,MEF}$	Valor del F_I obtenido numéricamente
C_{amort}	Coste de amortización de las herramientas utilizadas para el desarrollo del proyecto
C_{pers}	Coste del personal involucrado en el proyecto
C_{total}	Coste total del proyecto
A	Número de meses de disfrute del equipo o programa
B	Período de depreciación
C	Coste del equipo o licencia
D	Porcentaje de utilización

1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se expone la introducción del presente Proyecto Fin de Grado y se explican los objetivos y contenidos del mismo.

1.1 Introducción

Uno de los fallos más importantes que habitualmente sufren las máquinas rotatorias, tales como turbinas, bombas, rotores o compresores, es la aparición y propagación de fisuras de fatiga en sus elementos. El origen de este defecto se encuentra en las condiciones en las que trabajan los componentes, en los esfuerzos a los que están sometidos y en las imperfecciones propias del proceso de fabricación. Las propiedades mecánicas de los elementos pueden verse modificadas por la aparición de fisuras disminuyendo su rigidez, aumentando su flexibilidad y acortando su tiempo en servicio.

Los ejes son uno de los elementos principales de las máquinas rotatorias. La aparición de fisuras en estos componentes puede ocasionar la rotura de los mismos y, por tanto, dar lugar a elevados costes de reparación o mantenimiento. Para evitar el costoso proceso de remplazo, numerosos investigadores trabajan en el desarrollo de métodos de detección e identificación de fisuras en elementos mecánicos con el fin de salvar su integridad física.

Aunque la mayoría de las investigaciones que pueden encontrarse en la literatura analizan fisuras de frente recto [37], la experiencia muestra que las fisuras de fatiga que emergen en los ejes sometidos a esfuerzos de flexión y torsión presentan frente semielíptico. La mayor parte de los trabajos que estudian la propagación de este tipo de fisuras, consideran convexa la forma de las mismas [46]. Sin embargo, existen algunos estudios relacionados con este tipo de fisuras que tienen en cuenta la posible forma cóncava del frente [11].

Las fisuras se propagan en planos perpendiculares a la dirección de los ejes como consecuencia de la fatiga producida por las cargas cíclicas a las que están sometidos. La existencia de este tipo de defectos provoca un incremento de la flexibilidad local del componente originando modificaciones tanto en el comportamiento estático como en el dinámico, derivando, entre otros, en un aumento de los desplazamientos transversales y en una disminución de las frecuencias de vibración.

De este modo, el análisis del comportamiento en ejes fisurados sometidos a esfuerzos de flexión resulta un tema de gran importancia en los distintos campos de la ingeniería debido al problema que conlleva la ruptura catastrófica de los mismos, tanto en el caso de ejes sometidos a cargas estáticas como en el de ejes giratorios donde la apertura y cierre de la fisura juegan un papel fundamental. Numerosas investigaciones se centran en el desarrollo de detección de fisuras en componentes mecánicos, cuyo fin es determinar si las dimensiones de la fisura sobrepasan los máximos admisibles que comprometerían la integridad física de los componentes.

Para determinar la propagación de las fisuras es imprescindible conocer el estado de tensiones en las proximidades de las mismas. Por ello, el Factor de Intensidad de Tensiones, FIT, desempeña un importante rol en la Mecánica de la Fractura puesto que este parámetro es el que define el estado tensional en el frente de las fisuras. Por este motivo, en el presente trabajo se analiza el FIT a lo largo de una fisura de frente recto, circular y semielíptico de forma



cóncava contenida en un eje estático mediante el Método de Elementos Finitos. Además, se desarrolla una expresión cerrada para facilitar la obtención de esta variable en función de la profundidad y forma de la fisura y de la posición relativa en el frente.

1.2 Objetivos

Los objetivos fijados en este Trabajo Fin de Grado son los siguientes:

- Desarrollo de un modelo numérico con el fin de estudiar el Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo del frente de una fisura contenida en un eje estático circular sometido a flexión. En el análisis se considerarán fisuras semielípticas con forma cóncava de diferentes formas, profundidades y posiciones relativas en el frente de las mismas, para el modelo de fisura completamente abierta. Todo ello se estudiará empleando el programa de elementos finitos Abaqus.
- Desarrollo de un modelo analítico haciendo uso de Matlab para obtener una expresión para el Factor de Intensidad de Tensiones según las características de la fisura y de la posición relativa en el frente de la misma.

1.3 Estructura del trabajo

A fin de alcanzar los objetivos planteados, el presente trabajo se encuentra dividido en seis capítulos. El primero de ellos se ocupa de esta Introducción.

En el segundo capítulo se sintetizan los principales conceptos de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal que se han utilizado como base para el trabajo, se exponen notables trabajos relacionados con el problema propuesto y se explica el comportamiento de ejes fisurados a través del cálculo del FIT.

A continuación, en el tercer capítulo se realiza una breve descripción del Método de Elementos Finitos y del funcionamiento del *software* Abaqus, que se empleará para la implantación del modelo y su posterior simulación.



Seguidamente, en el cuarto capítulo se presenta el problema planteado, se desarrolla el correspondiente modelo numérico y se discuten y validan los resultados obtenidos.

En el quinto capítulo se realiza un modelo analítico con el fin de obtener una expresión general para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en función de la profundidad, forma y posición relativa en el frente de la fisura.

Para continuar, en el sexto capítulo se presenta la planificación necesaria para llevar a cabo el presente proyecto y el presupuesto empleado en el desarrollo del mismo

En el séptimo capítulo se exponen las principales conclusiones del trabajo y se plantean las posibles líneas de trabajo futuro.

Para finalizar, se incluyen las referencias bibliográficas utilizadas a lo largo de la realización de este Trabajo Fin de Grado y un anexo donde se muestran los coeficientes del ajuste de la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones desarrollada en el quinto capítulo.

2

ESTADO DEL ARTE

En este segundo capítulo se exponen los conceptos que se han empleado a lo largo del desarrollo de este Trabajo Fin de Grado. En primer lugar, se explican los principales conceptos de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. En segundo lugar, se nombran importantes investigaciones relacionadas con el problema planteado. Por último, se describen los modelos utilizados por numerosos investigadores para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones en ejes estáticos, finalidad de este trabajo.

2.1 Conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura

El objetivo de la Teoría de la Elasticidad es revelar métodos analíticos para desarrollar ecuaciones constitutivas, y de este modo, poder predecir el fallo en un sólido que carece de defectos. Sin embargo, la existencia de imperfecciones en un cuerpo impide la utilización de las Leyes de Hooke ya que la Teoría de la Elasticidad no considera la concentración de tensiones en los extremos de una fisura. Por ello, se torna indispensable el empleo de los principios de la Mecánica de la Fractura.

La Mecánica de la Fractura nació a principios del siglo XX de la mano de Griffith [26] y, en las últimas décadas, ha ido experimentando un vertiginoso desarrollo hasta convertirse en la base de importantes aplicaciones prácticas. El objetivo de esta disciplina es el estudio del comportamiento de componentes mecánicos fisurados y la posterior definición de criterios de rotura. Además, la Mecánica de la Fractura proporciona una mejora en los procesos de diseño de productos y de inspección de defectos, los cuales pueden desencadenar el fallo catastrófico de los componentes mecánicos [2].

2.1.1. Planteamiento local de la fractura

Con el fin de explicar los procesos de propagación de grietas en sólidos y la distribución de tensiones y deformaciones en un sólido fisurado, Griffith [26] estableció la teoría inicial en la que se sustenta la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) y sugirió criterios de propagación de fisuras en sólidos basados en transformaciones energéticas. Más tarde, Irwin [27] replanteó el estudio realizado por Griffith y propuso el análisis en términos de tensión. Paralelamente, se fueron desarrollando diferentes postulados como los de E. Orowan [35] o Paris y Erdogan [39].

El principal objetivo de la MFEL es la predicción e interpretación de la rotura de materiales frágiles cuya fractura se manifiesta sin una deformación plástica previa. En el estudio del sólido con comportamiento elástico-lineal, conviene identificar la existencia de tres modos básicos de fractura que dependen de la dirección de aplicación de la carga con respecto al plano que contiene la fisura (ver figura 2.1).

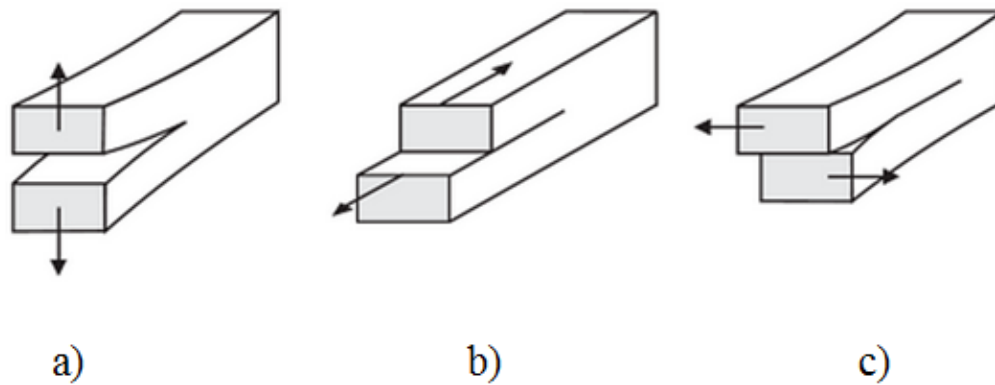


Figura 2.1: Modos básicos de fractura: a) Modo I o de apertura, b) Modo II o de cortadura, c) Modo III o de cizalladura [1]

En el modo de apertura o modo I, representado en la figura 2.1 a), los esfuerzos tensionales y los desplazamientos de los labios de la fisura son perpendiculares al plano de la misma, mientras que en el modo de cortadura o modo II, figura 2.1 b), estos parámetros están contenidos en el plano de la fisura y la dirección de propagación coincide con la dirección de la tensión. En el modo de cizalladura o modo III, figura 2.1 c), las tensiones y los desplazamientos de los labios de la fisura también están contenidos en el plano de la misma como en el modo anterior. Sin embargo, en este caso la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de la tensión.

En un sólido, estos modos de fractura pueden manifestarse de forma individual, denominados modos puros, o de forma conjunta, denominados modos mixtos. De esta forma, las tensiones en el frente de fisura pueden tratarse como uno o una combinación de los tres modos básicos de esfuerzos tensionales, comportándose de la misma manera el campo de deformaciones. Por lo tanto, la utilización del principio de superposición de los tres modos de fractura posibilita el estudio de cualquier situación de carga existente sobre la fisura.

La mayoría de fallos que se producen en los elementos mecánicos se deben a desplazamientos que corresponden al modo de apertura, modo I. Por ello, el modo de apertura es técnicamente el más importante y el que se va a tratar en este proyecto, ya que la flexión del eje provoca unas solicitaciones propias del mismo.

La MFEL manifiesta que los procesos de fractura se localizan en una pequeña zona próxima al frente de fisura, comportándose el resto del sólido de forma elástica-lineal. Irwin [27] demostró que los campos de tensiones y desplazamientos cerca del frente de una fisura pueden representarse mediante una constante llamada Factor de Intensidad de Tensiones, K , y estableció que la distribución de tensiones y deformaciones entorno a una fisura que se propaga en modo I puede formularse como expresan las ecuaciones 2.1.1 a 2.1.5 [2, 40].

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.1.2)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

$$u_z = 0 \quad (2.1.5)$$

En las expresiones 2.1.1 a 2.1.5 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} son las componentes del tensor de tensiones; u_x , u_y y u_z las componentes del tensor de desplazamientos; K_I el Factor de Intensidad de Tensiones en el modo I; r y θ las coordenadas de un punto en el sistema de referencia polar cuyo origen es el extremo de la fisura (ver figura 2.2); ν el coeficiente de Poisson y G el módulo de elasticidad. Al tratarse del modo I, la expresión 2.1.5 indica que se trata de un caso de deformación plana.

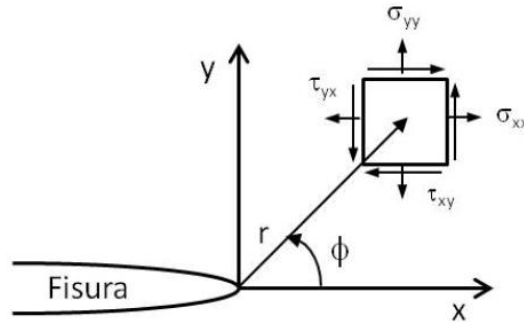


Figura 2.2: Sistema de coordenadas en el extremo de una fisura y componentes del tensor de tensiones [43]

Las expresiones 2.1.1 a 2.1.5 pueden escribirse de forma compacta como se muestran en las ecuaciones 2.1.6 y 2.1.7 [2, 40, 43].

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2.1.6)$$

$$u_i = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta, \nu) \quad (2.1.7)$$

Donde σ_{ij} y u_i son las componentes del tensor de tensiones y desplazamientos, respectivamente, referidos a un sistema de coordenadas con origen en el extremo de la fisura (ver figura 2.2); f_{ij} una función que depende de θ y f_i otra función que depende tanto de θ como de μ .

El FIT es un parámetro que define el campo de tensiones en las proximidades de la fisura y es directamente proporcional a la profundidad de la grieta a y a la tensión de referencia σ , la cual depende de las fuerzas externas. Generalmente, el FIT queda determinado matemáticamente por la expresión 2.1.8 [48, 2].

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.1.8)$$

Donde F_I es el factor de corrección adimensional que depende de la geometría de la fisura (FIT adimensional).

La propagación de la fisura tendrá lugar cuando el FIT alcance un valor crítico denominado tenacidad a la fractura, el cual se expresa como K_{IC} . Por tanto, según el criterio de fractura de la MFLE se producirá la fractura del componente cuando:

$$K_I \geq K_{IC} \quad (2.1.9)$$

2.1.2. Planteamiento global de la fractura

Una vez comentado el planteamiento local de la fractura se va a proceder a la explicación del planteamiento global de la misma.

Tomando como base el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta los postulados de Griffith [26] e Irwin [27] comentados anteriormente, se define la tasa de liberación de energía a razón de la ecuación 2.1.11.

$$G = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da} \quad (2.1.10)$$

En la expresión 2.1.11 G es la tasa de liberación de energía que depende de la tensión, profundidad de la fisura y geometría del sólido; F el trabajo realizado por las solicitaciones externas y U la energía de deformación.

La propagación de la grieta tendrá lugar cuando la resistencia al avance de la fisura (R) sea menor que dicha tasa de liberación. A diferencia de la tasa de liberación, la resistencia al avance de la fisura es una propiedad intrínseca del material y no puede ser calculada, debe hallarse de manera experimental. De este modo, la capacidad de propagación de la fisura queda determinada por la ecuación 2.1.11.

$$G \geq R \quad (2.1.11)$$

El Factor de Intensidad de Tensiones y la tasa de liberación de energía pueden relacionarse como refleja la expresión 2.1.12.

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.1.12)$$

Teniendo en cuenta que en el caso de tensión plana E' es igual al módulo de elasticidad E y en el caso de deformación plana $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, y en Mecánica de la Fractura Elástica Lineal la tasa de liberación de energía G coincide con la integral J [30].

2.2 Tipología de fisuras en ejes

La mayoría de las investigaciones que se encuentran en la literatura que estudian la obtención de la flexibilidad y el comportamiento de ejes fisurados suponen un frente de fisura recto [14, 20, 37, 32]. Aunque esta suposición es válida, no refleja la verdadera geometría de las fisuras en ejes, ya que estos presentan un frente de fisura aproximadamente semielíptico. La mayoría de los trabajos que estudian este tipo de fisuras se centran en fisuras de frente semielíptico con forma convexa [10, 22, 28, 33, 34, 46]. Por ello, esta investigación se basa en el estudio pormenorizado de fisuras de frente semielíptico con forma cóncava [11, 12, 42].

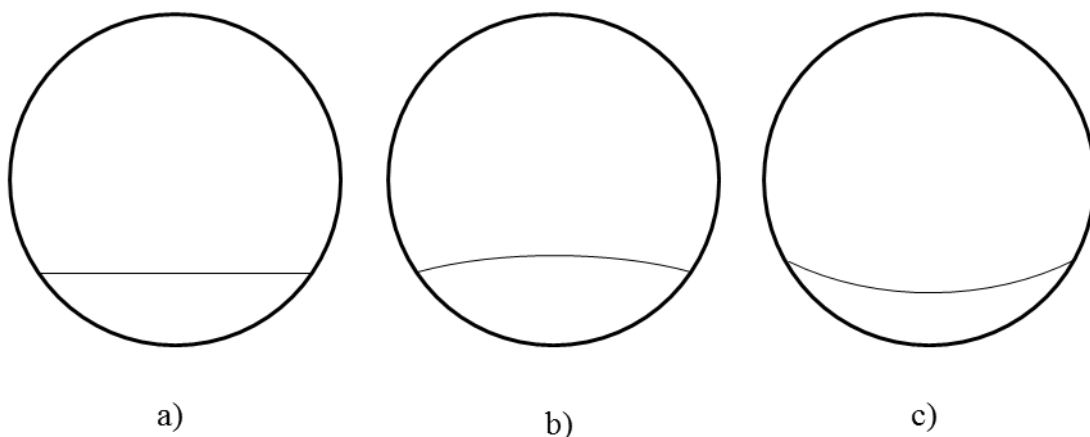


Figura 2.3: Tipología de la fisura: a) Fisura de frente recto; b) Fisura de frente semielíptico convexo; c) Fisura de frente semielíptico cóncavo

2.3 Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en ejes fisurados

Para conocer el comportamiento mecánico de los ejes fisurados basta con conocer el parámetro en el que se fundamenta la Mecánica de la Fractura, el Factor de Intensidad de Tensiones. Los métodos de cálculo del FIT en fisuras contenidas en ejes pueden clasificarse en los siguientes grupos: experimentales, numéricos y analíticos.

2.3.1 Ejes con fisuras de frente recto

Por simplicidad, la mayoría de los estudios que se encuentran en la literatura se centran en el estudio del Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras que presentan un frente recto. Entre ellos se pueden destacar los trabajos experimentales que llevaron a cabo Ouchterlony [36] y Bush [6] con el fin de determinar el FIT en este tipo de fisuras a través de procedimientos basados en la flexibilidad de la fisura.

También, cabe destacar las investigaciones de Carpinteri [9] y Blackburn [5] quienes obtuvieron el FIT mediante el Método de Elementos Finitos, a lo largo del frente de una fisura contenida en un eje cilíndrico sometido a tracción y flexión.

Asimismo, no se puede olvidar el trabajo de Valiente [50] donde se explica el cálculo del FIT mediante el Método de Elementos Infinitos y el método de rigidez diferencial. Una vez obtenidos los valores del FIT, Valiente [50] desarrolló una expresión cerrada para dicho parámetro en el punto central del frente mediante un ajuste polinómico a fin de facilitar la obtención del mismo.

2.3.2 Ejes con fisuras de frente semielíptico

Los primeros trabajos que estudiaron el FIT en fisuras de frente curvo en ejes analizaron fisuras de frente semicircular [23, 41]. Más tarde, se consideraron fisuras de frente semielíptico ya que es la geometría que más se aproxima a la realidad. Dentro de estas últimas, pueden distinguirse dos tipos: fisuras semielípticas con forma convexa y con forma cóncava. Del primer tipo pueden encontrarse en la literatura diversas investigaciones que calculan el Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo del frente de fisura [10, 22, 28, 33, 34, 46]. Sin embargo, del segundo tipo se han encontrado muy pocos trabajos [11, 12, 42].

La geometría de las fisuras de frente semielíptico con forma convexa queda reflejada en la figura 2.4. En ella se muestra la sección transversal de un eje que contiene este tipo de fisuras, cuyo centro de la elipse se encuentra en el punto inferior de dicha sección.

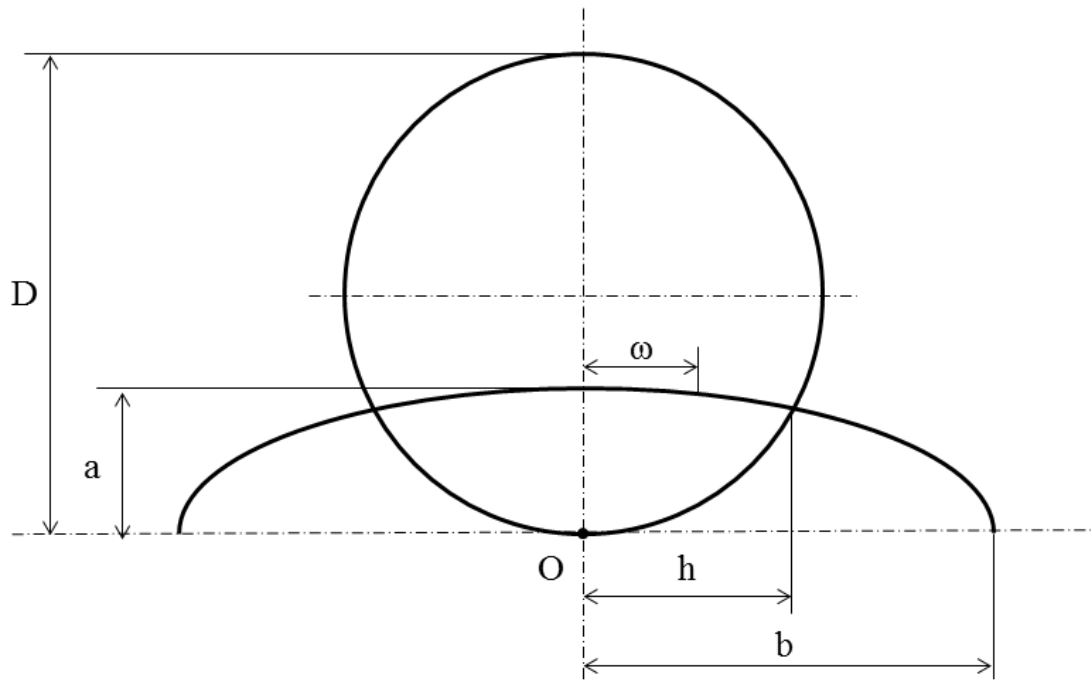


Figura 2.4: Sección transversal de la zona fisurada de un eje y parámetros característicos de una fisura semielíptica con forma convexa

En la figura 2.4 D es el diámetro del eje, a y b los semiejes menor y mayor de la elipse respectivamente, O el centro de la elipse, h la distancia del centro del eje al punto del frente de fisura situado en el contorno exterior del eje y ω la distancia del centro del eje a un punto cualquiera del frente de la fisura.

Los parámetros característicos de este tipo de fisuras son los siguientes:

- Profundidad relativa de la fisura, α

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad (2.3.1)$$

- Factor de forma de la fisura, β

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (2.3.2)$$

Los valores de este parámetro están comprendidos entre 0 y 1, siendo $\beta = 0$ fisuras de frente recto, $\beta = 1$ fisuras de frente semicircular y los valores restantes fisuras semielípticas.

- Posición relativa en el frente de fisura, γ

$$\gamma = \frac{\omega}{h} \quad (2.3.3)$$

Los métodos de cálculo del FIT en fisuras semielípticas contenidas en ejes pueden clasificarse en los siguientes grupos: experimentales, numéricos y analíticos.

La diferencia entre las fisuras de frente semielíptico de forma convexa y las de forma cóncava se encuentra en la posición relativa del centro de la elipse. En el primer caso, el centro se localiza en el punto inferior de la sección transversal del eje, mientras que en el segundo se sitúa en el punto superior de la misma.

En la figura 2.5 se observan los principales parámetros de una fisura de frente semielíptico con forma cóncava contenida en un eje.

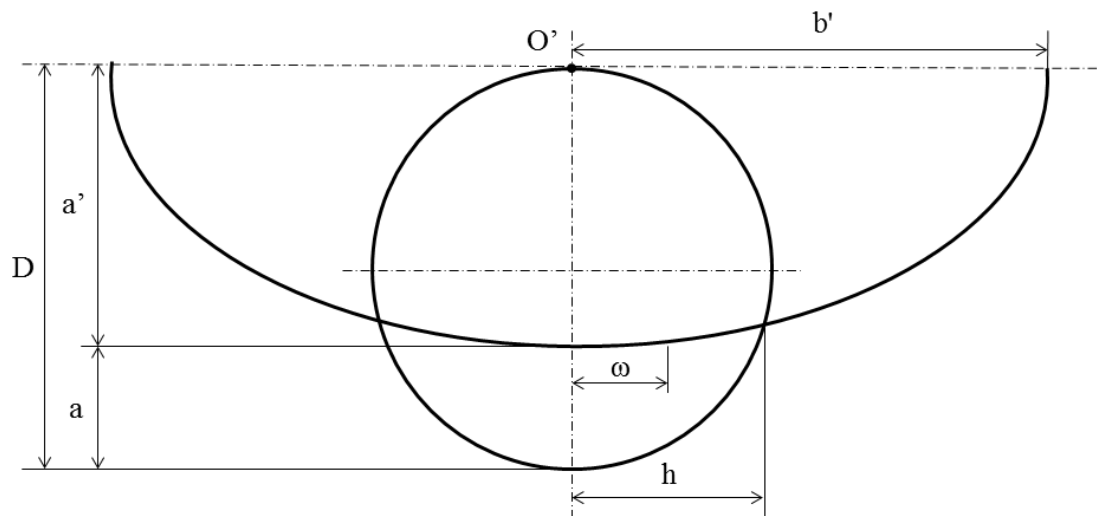


Figura 2.5: Sección transversal de la zona fisurada de un eje y parámetros característicos de una fisura semielíptica con forma cóncava

En este caso, los parámetros que caracterizan las fisuras de frente semielíptico tienen alguna variación debido a la posición relativa del centro de la elipse:

- Profundidad relativa de la fisura, α

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad (2.3.4)$$

- Factor de forma de la fisura, β'

$$\beta' = \frac{a'}{b'} \quad (2.3.5)$$

Los valores de este parámetro están comprendidos entre 0 y 1, siendo $\beta' = 0$ fisuras de frente recto, $\beta' = 1$ fisuras de frente semicircular y entre ellos fisuras semielípticas.

- Posición relativa en el frente de fisura, γ

$$\gamma = \frac{\omega}{h} \quad (2.3.6)$$

Los métodos de cálculo del FIT en fisuras de frente semielíptico contenidas en ejes pueden ser experimentales, numéricos y analíticos.

Los métodos experimentales posibilitan la obtención del FIT a través de procesos empíricos donde se determinan parámetros como el campo de tensiones, desplazamientos o deformaciones de la estructura en estudio. A partir de ellos y mediante la utilización de cálculos indirectos se obtienen los valores del Factor de Intensidad de Tensiones. Una de las técnicas más antiguas en el análisis de esfuerzos y deformaciones es la fotoelasticidad, que fue desarrollada por los investigadores Coker y Filon [15]. Este procedimiento tiene como objeto el dibujo de las figuras que produce una pieza sometida a esfuerzo sobre un material transparente. Los contornos coloreados que resultan de dicha técnica se asemejan a los proporcionados por el Método de Elementos Finitos [47].

Los principales métodos analíticos son por un lado, el análisis integral de contorno, desarrollado en torno a la integral J [30] y, por otro lado, los basados en enunciados de la Mecánica de la Fractura [31].

Entre los diferentes procedimientos numéricos cabe destacar el Método de Elementos Finitos (MEF) [16, 30, 44, 45, 46], considerado el método numérico por excelencia, y el Método de Elementos de Contorno (MEC) [3, 29] cuya contribución en la actualidad es menor. A partir de estas técnicas, se pueden desarrollar expresiones cerradas para la obtención del FIT en el frente de la fisura. Dependiendo de los parámetros condicionantes del problema se pueden formular diferentes expresiones:

- Expresión del FIT que depende de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta) \quad (2.3.7)$$

Esta expresión se utiliza para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones en un punto específico del frente de la fisura, como por ejemplo el punto central o los puntos próximos a los extremos. Shin y Chen [44] utilizaron ajustes polinómicos con el fin de obtener una expresión para el cálculo del FIT en el punto central de la fisura a partir de los datos obtenidos por Carpinteri [8, 9].

- Expresión del FIT que depende de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.3.8)$$

En este caso, empleando esta expresión se puede calcular el FIT en cualquier punto del frente de la fisura. Shin y Cai [46] desarrollaron un modelo numérico para obtener los valores del FIT a lo largo del frente de una fisura semielíptica y, a partir de estos resultados, alcanzaron una expresión cerrada para el cálculo de este parámetro. En el presente trabajo se realizará el mismo procedimiento que llevaron a cabo estos autores.



- Expresión del FIT que depende de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β , de la posición relativa en el frente γ y del ángulo de giro del eje θ :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \quad (2.3.9)$$

Con esta expresión se puede calcular el FIT en cualquier punto del frente para cualquier combinación de profundidad y forma de fisura, y además, en cualquier posición que se encuentre el eje en su rotación. P. Rubio [43] desarrolló una expresión de este tipo para un eje giratorio que contiene fisuras de frente semi-elíptico con forma convexa.

En la actual investigación no se hará uso de esta expresión debido a que se ha estudiado un eje estático no rotatorio.

3

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En este capítulo se describen los principales fundamentos del Método de Elementos Finitos y del funcionamiento del programa Abaqus que se han utilizado para el desarrollo del modelo numérico.

3.1 Introducción al método de elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es una de las herramientas más potentes usadas en la actualidad para el cálculo y la resolución numérica de problemas en el ámbito de la ingeniería. Casos que hasta hace poco resultaban imposibles de resolver mediante los métodos matemáticos tradicionales, ahora resultan factibles gracias a esta herramienta computacional [7]. El análisis por elementos finitos ha corroborado muchos de los cálculos experimentales llevados a cabo hace cincuenta años y, hoy en día, permite estudiar con rigor las situaciones de carga y geometrías complejas de los componentes estructurales.

El MEF deja atrás la construcción de prototipos reales que han de ser ensayados y mejorados de forma reiterada. Permite realizar un modelo del sistema real más sencillo de modificar y más económico que dichos prototipos [7]. Todo ello supone una gran ventaja, minimiza los costes y el tiempo de desarrollo en la industria.

No obstante, se trata de un método de resolución aproximado debido a las hipótesis básicas que emplea. Es por esto que el desarrollo de prototipos sigue siendo imprescindible, aunque en menor medida, ya que el primer modelo simulado puede acercarse al diseño óptimo. Todo ello dependerá de la correcta definición del modelo.

3.2 Conceptos básicos del método

El fundamento del MEF consiste en la transformación de modelos continuos en modelos discretos aproximados. Ello se consigue dividiendo el problema en un número finito de pequeñas franjas, denominadas elementos, que se encuentran conectados entre sí por medio de unos puntos llamados nodos [24]. De esta forma, los elementos quedan gobernados por las mismas ecuaciones que rigen el cuerpo continuo, cuyo fin es transformar un sistema con infinitos grados de libertad, regido por ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finitos, modelado por ecuaciones algebraicas.

Cualquier sistema que se encuentre bajo análisis se puede dividir en (ver figura 3.1) [7]:

- Dominio: espacio geométrico global donde se define el sistema a analizar.
- Condiciones de contorno: variables conocidas que condicionan el cambio del sistema. En el problema planteado en este trabajo serán los apoyos, que restringen el desplazamiento del eje pero no el giro, y las cargas aplicadas sobre el mismo.
- Incógnitas: variables desconocidas del sistema que son objeto de dicho análisis, tales como tensiones, desplazamientos, temperaturas, etc. Se conocen después de que las condiciones de contorno hayan actuado sobre el sistema. Así, la incógnita de este proyecto será el Factor de Intensidad de Tensiones.

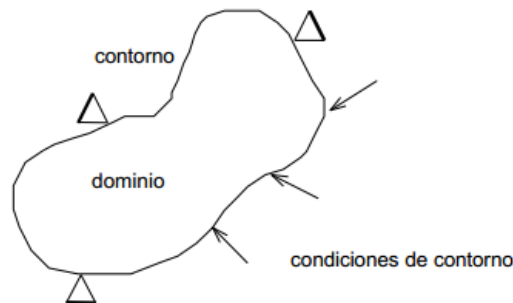


Figura 3.1: Esquema de un sistema en análisis [7]

Para solucionar cualquier problema, el método considera el dominio discretizado en subdominios o elementos. En caso de tratarse de un problema lineal, el dominio se divide mediante puntos. Mientras que si es un modelo bidimensional lo hace mediante líneas y si es un sistema en tres dimensiones, como en nuestro caso, lo hace mediante superficies imaginarias [7]. De esta forma, se consigue que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos en que se subdivide. Por este motivo, la discretización del medio es una de las etapas más críticas. De ella dependen las aproximaciones y la exactitud de la solución; por lo que es necesario seleccionar adecuadamente el tamaño y la forma de los elementos, reproduciendo dicho dominio con la mayor fiabilidad posible.

El Método de Elementos Finitos se puede dividir en tres etapas:

- Pre-proceso: en esta fase, se elabora el modelo a simular definiendo tanto el dominio como las condiciones de contorno.
 - Dibujo de la geometría del modelo eligiendo correctamente los elementos a emplear.
 - Definición de las propiedades de los materiales que constituyen el modelo y asignación de los mismos a las diferentes partes que lo componen.



- Aplicación de las condiciones de contorno y cargas exteriores a las que estará sometida la estructura.
- Discretización del modelo y mallado del mismo.
- Procesamiento o resolución: en esta etapa se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones del problema.
 - Elección del tipo de cálculo a realizar.
 - Configuración de los parámetros de cálculo como el número de iteraciones y los intervalos de tiempo.
 - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Post-proceso: en esta fase, se obtienen y analizan los resultados del problema tanto gráfica como numéricamente, pudiéndose detectar posibles errores cometidos en las etapas anteriores. Además, se pueden hallar resultados indirectos productos de operar las soluciones del problema.

3.3 Método de elementos finitos con “Abaqus 6.11”

El *software* de elementos finitos conocido como Abaqus fue desarrollado a finales de la década de los setenta por David Hibbitt, Dr. Bengt Karlsson y P. Sorensen. Hoy en día, se utiliza en diferentes sectores industriales tales como el automóvil, nuclear, aeroespacial, eólico, biomédico e industrias de consumo para resolver complejos problemas de ingeniería [21].

Abaqus consta de los siguientes productos [21]:

- Abaqus/CAE: es un entorno interactivo que se utiliza para crear modelos de elementos finitos, realizar análisis, visualizar y evaluar los resultados de las simulaciones. Además, se puede importar la geometría y la malla del modelo a partir de otros formatos CAD y de otro *software* de elementos finitos, respectivamente.
Esta interfaz se compone de diferentes módulos que facilitan la implementación del modelo.

- Abaqus/CFD: está basado en la dinámica de fluidos computacional de propósito general. Es capaz de realizar simulaciones tanto de tipo estructural como térmico.
- Abaqus/Standard: es un programa que permite resolver los tradicionales análisis de elementos finitos de tipo implícito tales como análisis estáticos, dinámicos a baja velocidad, térmicos, etc. incluyendo contactos y no linealidades de material. Se encuentra integrado en Abaqus/CAE para todo el pre y post-proceso del análisis.
- Abaqus/Explicit: se utiliza para estudiar tanto casos estáticos a alta velocidad como casos cuasiestáticos, en los que las no linealidades (contactos, grandes deformaciones, etc.) son indiscutibles. Este módulo también está integrado en Abaqus/CAE para todo el pre y post-proceso del análisis.
- Abaqus/Viewer: módulo donde se visualizan los resultados del problema. Se encuentra integrado en Abaqus/CAE y comprende la etapa de post-proceso.

Este programa se encuentra estructurado en tres grandes bloques que corresponden con las tres etapas (pre-proceso, procesamiento y post-proceso) en que se divide un problema para ser analizado por medio del Método de Elementos Finitos.

Para resolver un problema mediante Abaqus 6.11, versión utilizada en este trabajo, se han de introducir todos los datos de entrada requeridos por el programa (ver figura 3.2). Esta etapa se corresponde con la fase de pre-proceso del método de elementos finitos.

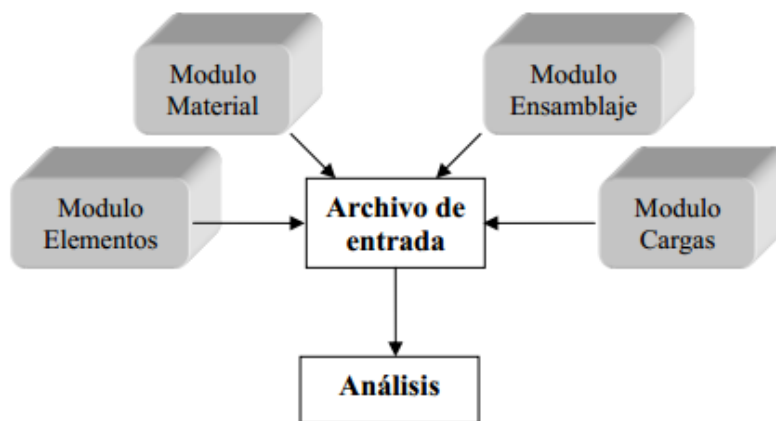


Figura 3.2: Esquema de los componentes de un modelo en Abaqus

En los datos de entrada introducidos se definen los siguientes parámetros:

- Geometría del modelo (módulo *Part*): debe representar lo más fielmente posible el cuerpo real a estudiar. Abaqus permite modelar geometrías muy complejas gracias al módulo Abaqus/CAE. Es conveniente tener previsto cómo son las condiciones de contorno y el mallado para realizar las particiones pertinentes en el modelo. La geometría quedará definida por los elementos y los nodos que lo componen.



- Características del material (módulo *Property*): se han de especificar las propiedades de todos los materiales que componen el modelo y asociarlas a las partes correspondientes.
- Ensamblaje (módulo *Assembly*): la estructura puede estar constituida por una o varias piezas que deben ser ensambladas, definiendo correctamente las relaciones y posiciones relativas que existen entre ellas.
- Condiciones de contorno (módulo *Load*): formadas por las condiciones iniciales aplicadas en el modelo como esfuerzos, deformaciones o velocidades, así como las restricciones a las que se encuentra sometido.
- Interacciones (módulo *Interaction*): la estructura a analizar puede estar compuesta por diferentes partes que sufren contacto o interacciones entre ellas.
- Mallado (módulo *Mesh*): el modelo en estudio se divide en elementos sobre los que se resuelven las ecuaciones de campo.

Una vez introducidos los datos de entrada, se procede a la resolución del modelo. Esta fase corresponde a la etapa de procesamiento y en ella Abaqus no interacciona con el usuario. Una vez que Abaqus ha resuelto el problema, los resultados pueden verse a través del módulo de visualización. En esta etapa de post-procesamiento se pueden crear tanto diagramas, gráficos y tablas de resultados como animaciones de la simulación de los mismos.

A la hora de utilizar el Método de Elementos Finitos, es necesario analizar la validez de los resultados donde se deben aplicar los conocimientos y la lógica ingenieril.

4

MODELO NUMÉRICO

En el presente capítulo se expone el planteamiento del problema a estudiar y se explica el modelo numérico realizado mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) utilizando el código comercial Abaqus 6.11. Por último, se analizan y validan los resultados obtenidos.

4.1 Modelo geométrico

Se ha implementado un modelo numérico en tres dimensiones con el fin de estudiar el Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo de una fisura de frente semielíptico con forma cóncava, completamente abierta y sometida a flexión, en función de las características de fisura, profundidad y forma, y de la posición relativa en el frente.

4.1.1 Planteamiento del problema

Se tiene un eje cilíndrico de aluminio de longitud $L = 900 \text{ mm}$ y diámetro $D = 20 \text{ mm}$ cuyas propiedades se reflejan en la tabla 4.1.1.

Tabla 4.1.1: Propiedades del aluminio utilizadas

Propiedad	Valor
Módulo de elasticidad (E)	72 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.33
Densidad (ρ)	2800 kg/m ³

Dicho eje está apoyado en sus dos extremos y posee una fisura transversal de frente recto, circular y semielíptico-cóncavo en su parte central. Además, se encuentra sometido a dos cargas puntuales de valor $F = 100 \text{ N}$, situadas a una distancia d de los extremos del eje (ver figura 4.1), que determinan un estado de flexión pura en la sección fisurada.

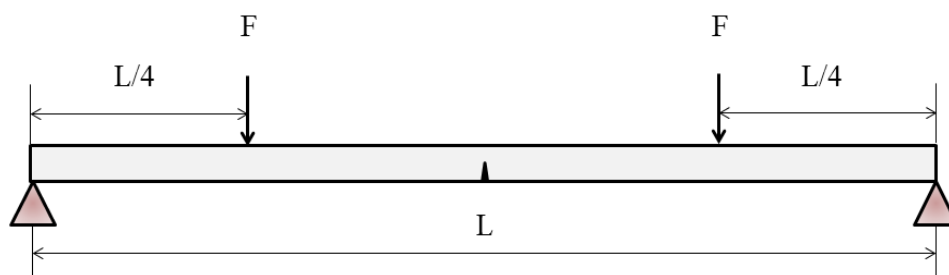


Figura 4.1: Esquema del eje fisurado

En el apartado 2.3 se han explicado los parámetros característicos de una fisura, dentro de los cuales se van a estudiar los siguientes valores:

- Para la profundidad relativa de la fisura (α) se considera un intervalo comprendido entre 0.1 y 0.8 aumentando a razón de 0.1 (ver figura 4.2).

- En el caso del factor de forma de la fisura (β) se toma un intervalo comprendido entre 0 y 1 aumentando a razón de 0.25 (ver figura 4.2).

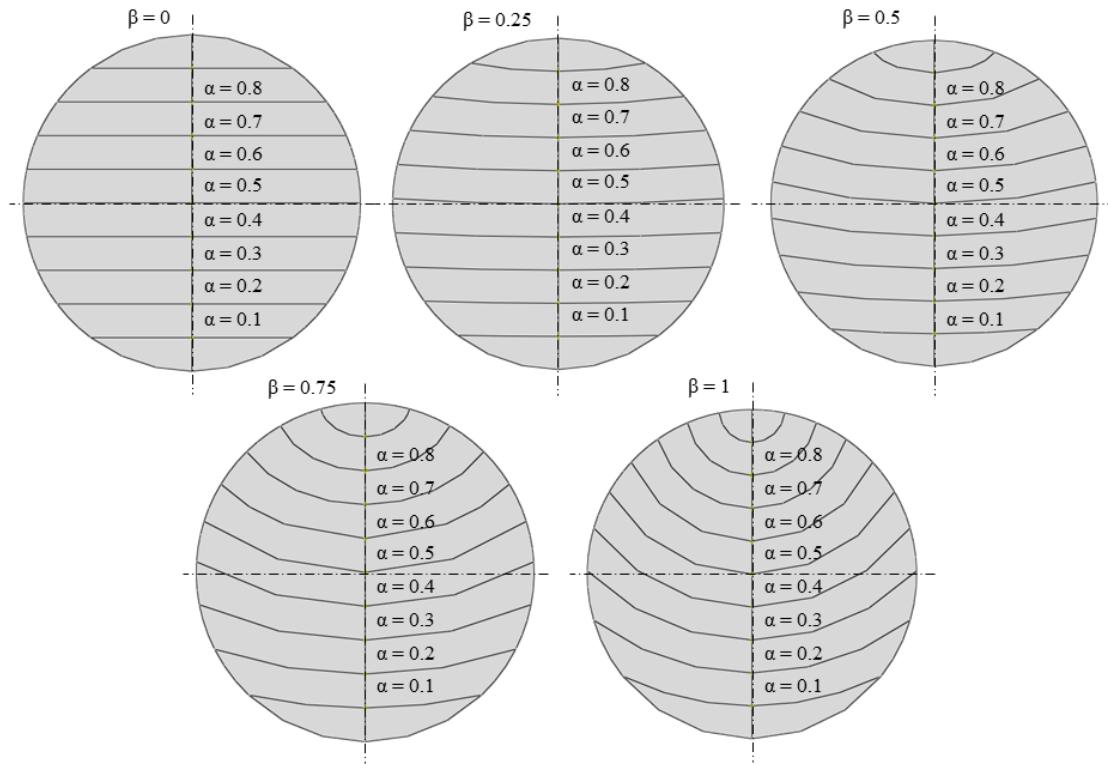


Figura 4.2: Esquema de la profundidad α y del factor de forma β de la fisura

- Por último, para la posición relativa en el frente de la fisura (γ) se toma un intervalo comprendido entre -0.83 y 0.83 aumentando a razón de 0.16 (ver figura 4.3).

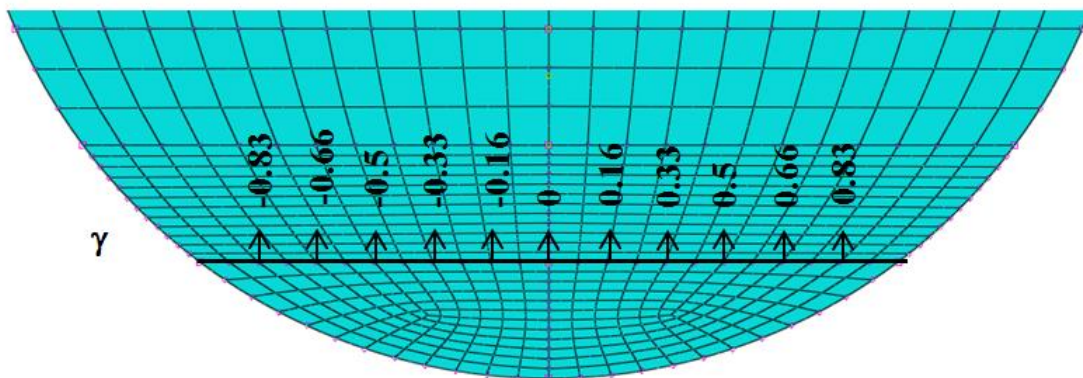


Figura 4.3: Detalle de la sección fisurada y posición relativa en el frente de la fisura γ

De este modo, combinando las ocho profundidades relativas y los cinco factores de forma resulta un total de cuarenta casos diferentes a estudiar.

4.2 Modelo numérico

En este apartado se describe el modelo numérico tridimensional que se ha utilizado para resolver el problema con sus cuarenta variaciones geométricas anteriormente planteadas. Todo ello se llevará a cabo empleando la versión 6.11 del Código Comercial ABAQUS/Cae [18, 19].

4.2.1 Geometría del modelo

En primer lugar, se comienza por especificar la geometría del modelo a estudiar en el módulo *Part*. Debido a la presencia de la fisura en la parte central del eje, se van a considerar dos tramos diferentes en el mismo. Para ello, se crean dos cilindros macizos de longitud 450 mm y diámetro 20 mm que simulen cada mitad del eje.

A lo largo de estas dos mitades, se realizan diferentes particiones geométricas, tanto longitudinales como transversales (ver figura 4.4) a partir de las cuales se modela la presencia de la fisura y se facilita la aplicación de las fuerzas y la introducción de un mallado más fino en la zona de interés.

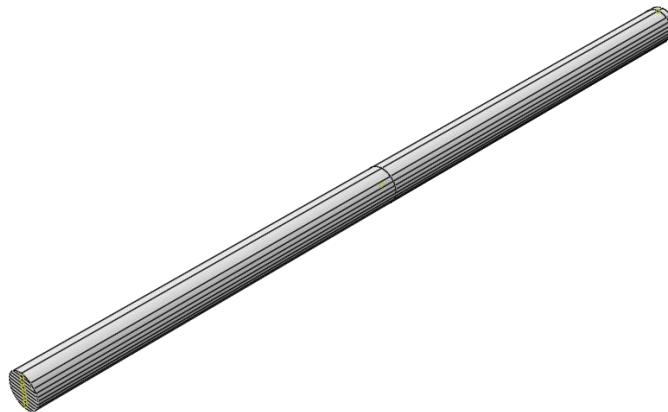


Figura 4.4: Mitad del eje de estudio

Las particiones longitudinales corresponden a las ocho profundidades de fisura de cada factor de forma β (ver figura 4.2) y a un plano vertical que pasa por el centro del eje. El dibujo de las primeras ocho particiones se realiza en la cara de uno de los extremos de la barra y, posteriormente, se extiende a lo largo del eje de la misma. El plano vertical sirve para estructurar el mallado de forma simétrica con respecto a dicho plano.

Además de estas particiones, es necesario crear dos particiones transversales en cada mitad del eje (ver figura 4.5). En la partición *a*, que se encuentra a 225 mm del extremo izquierdo de la barra, se posicionará la carga puntual de 100 N. La partición *b*, que se sitúa a 4

mm del extremo derecho de la barra, sirve para definir una malla más refinada en las proximidades de la fisura.

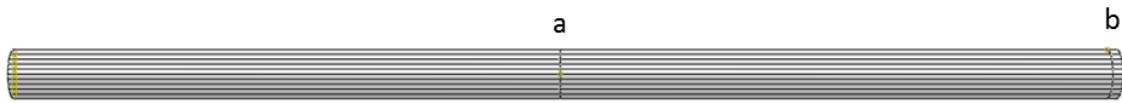


Figura 4.5: Particiones transversales de la barra

4.2.2 Propiedades del material

En el siguiente módulo, *Property*, se crea el material de las partes que componen el modelo y se definen sus propiedades. En nuestro caso, se fijan las propiedades del aluminio (ver tabla 4.1.1) y se asocian a ambas partes.

4.2.3 Ensamblaje del modelo

En este caso, se hace uso del módulo *Assembly* para crear una instancia donde definir la geometría final del modelo. Es decir, se unen las dos barras anteriormente creadas por la sección fisurada fijando correctamente la posición relativa entre ellas (ver figura 4.6) a fin de establecer en el módulo siguiente las interacciones pertinentes.

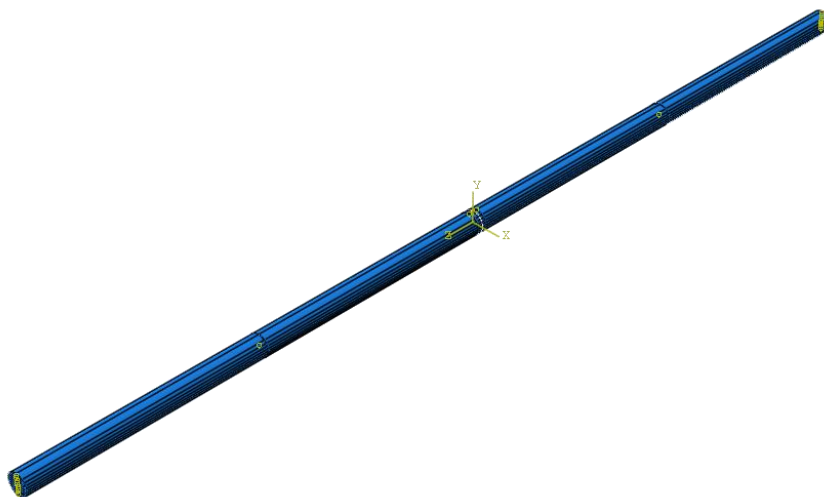


Figura 4.6: Ensamblaje de las dos barras

4.2.4 Contactos entre superficies

Como se ha mencionado en el módulo anterior, el modelo se compone de dos barras unidas por la sección fisurada. Dicha sección presenta tres zonas claramente diferenciadas:

- Una zona de unión que mantiene unidas ambas barras, como si de un eje macizo se tratara. Esta región corresponde a la zona no fisurada de la sección.
- Una zona fisurada que no presenta contacto entre las superficies de las caras libres de la fisura, debido a que se ha considerado un modelo de fisura completamente abierta.
- El frente de la fisura que se sitúa a la altura de la misma y simula la frontera entre ambas zonas.

De este modo, en el módulo *Interaction* se define una restricción de tipo *Constraint – Tie* entre las superficies que conforman la parte intacta de la sección fisurada para garantizar la unión entre las barras. La región rosada de la figura 4.7 corresponde a dicha región.

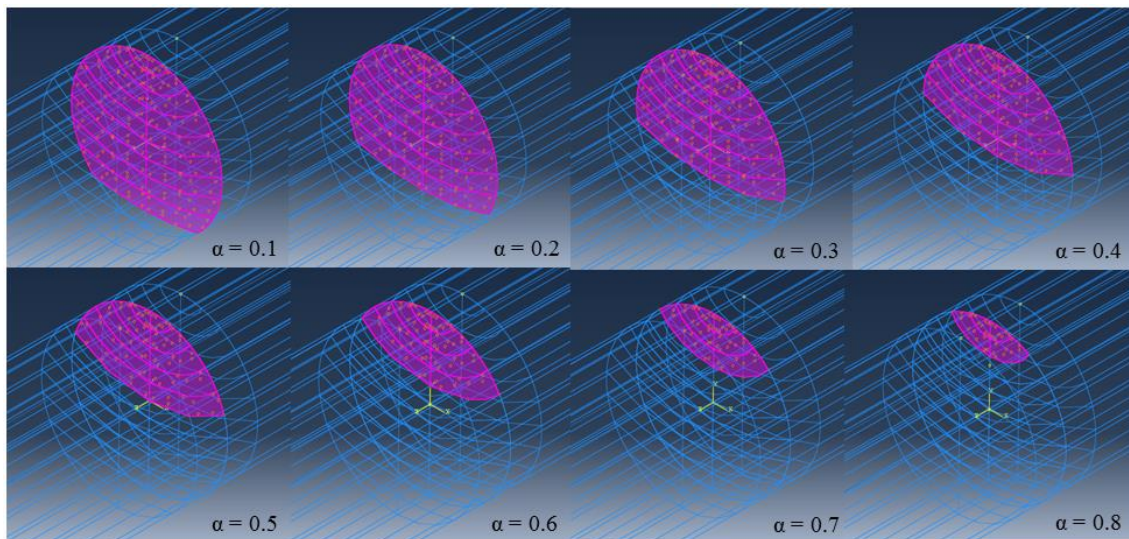


Figura 4.7: Detalle de los contactos en la zona intacta para $\beta = 0.75$

En este caso no hace falta establecer un contacto de tipo *Surface-to-surface* entre los labios de la grieta ya que se ha considerado un modelo de fisura completamente abierta y en ningún caso existirá contacto entre ambas superficies.

Por último, se ha de definir el frente de fisura y la dirección de propagación de la misma mediante el módulo crack que ofrece Abaqus [18, 19]. El frente de fisura se colocará en la partición correspondiente a la profundidad relativa α que esté en estudio. En la figura 4.7, se observa el frente de fisura, frontera entre la zona intacta y la fisurada, para el caso de $\beta = 0.75$ y las diferentes profundidades relativas.

4.2.5 Cargas y condiciones de apoyo

Este modelo está sometido a un estado de cargas definido por dos fuerzas puntuales y simétricas de 100 N cada una en sentido negativo del eje Y. Están aplicadas en el punto central de la sección del eje en las particiones transversales realizadas en el proceso de modelado a una distancia $d = 225 \text{ mm}$ de los extremos del mismo (ver figura 4.8).

Además, se han de crear dos apoyos en los dos extremos del eje (ver figura 4.8) con el fin de impedir los desplazamientos según los ejes radiales y, así, permitir el resto de desplazamientos y giros.

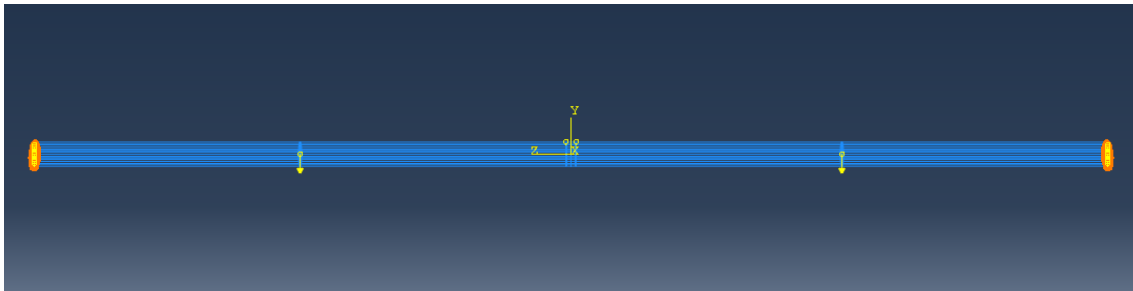


Figura 4.8: Eje biapoyado sometido a flexión pura

4.2.6 Mallado del modelo

El eje modelado se ha discretizado mediante elementos cuadráticos hexaédricos estructurados de integración reducida, C3D20 [18, 19]. En la zona fisurada se ha empleado una malla más fina debido a los elevados gradientes de tensiones y deformaciones. A fin de establecer el tamaño óptimo de la malla a utilizar, se ha elaborado un análisis de sensibilidad hasta alcanzar la convergencia de los resultados. De este modo, la malla resultante comprende aproximadamente 87000 elementos y 365000 nodos.

En las figuras 4.9 y 4.10 queda reflejada la malla utilizada en las vistas transversal y longitudinal en el caso de $\beta = 0.75$ y todos los valores de las profundidades relativas.

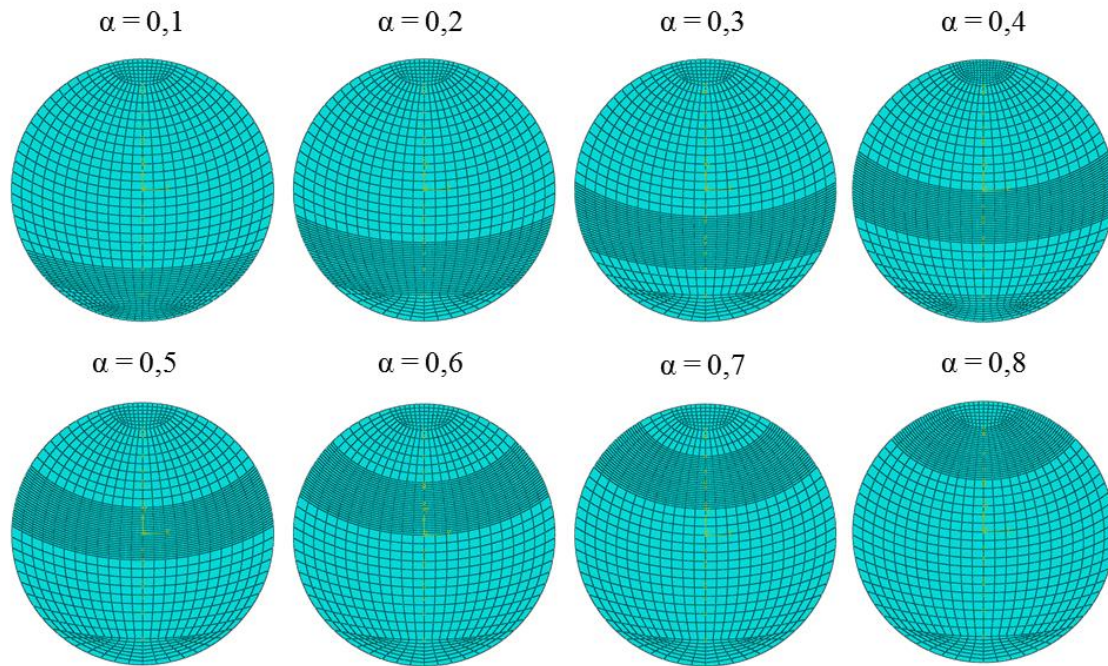


Figura 4.9: Detalle de la malla del eje en la sección transversal para $\beta = 0.75$

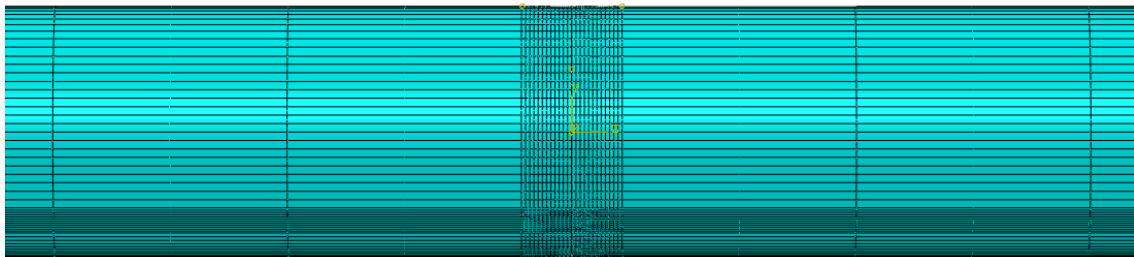


Figura 4.10: Detalle de la malla del eje en la sección fisurada

4.2.7 Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones

Como se ha mencionado en el apartado *Interaction*, Abaqus ofrece un módulo denominado *crack* destinado al estudio de la fractura y al cálculo del FIT. Gracias a él se puede obtener el valor de dicho parámetro en cada punto del frente a partir de estimaciones integrales de contorno [30]. Para ello, el programa requiere la introducción del número de contornos en los que calcular el FIT. Tras analizar la convergencia de los resultados, se puede afirmar que con cinco aseguramos el número óptimo de contornos.

4.2.8 Análisis de resultados y discusión

En este apartado se presentan y analizan los resultados correspondientes al Factor de Intensidad de Tensiones de todos los casos considerados anteriormente obtenidos a través del módulo *crack* del programa Abaqus. En las figuras 4.11 a 4.15 se han graficado los valores del FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente de la fisura para cada factor de forma β y todos los valores de profundidad α .

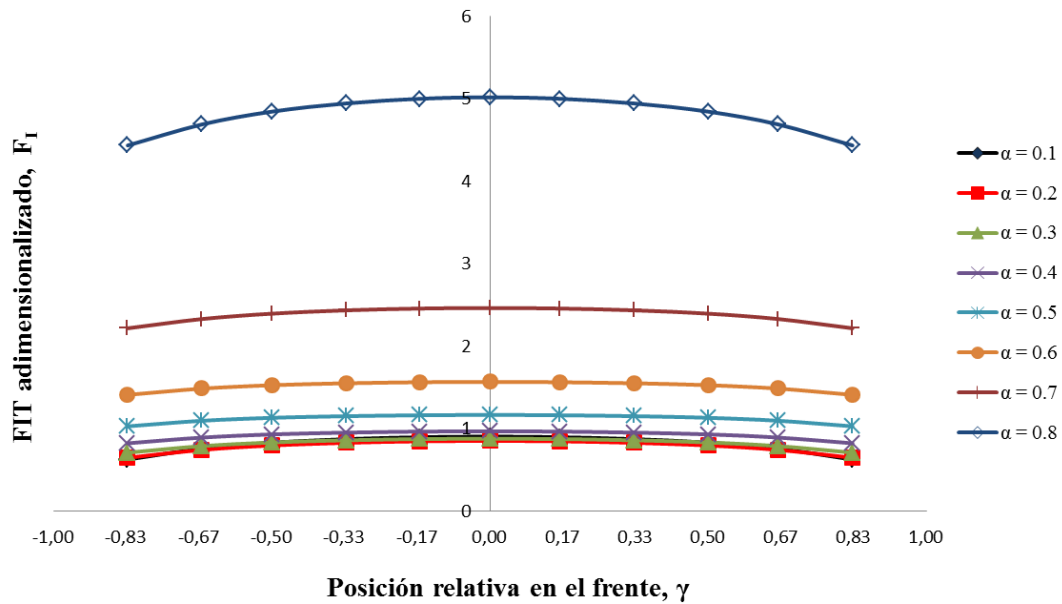


Figura 4.11: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0$

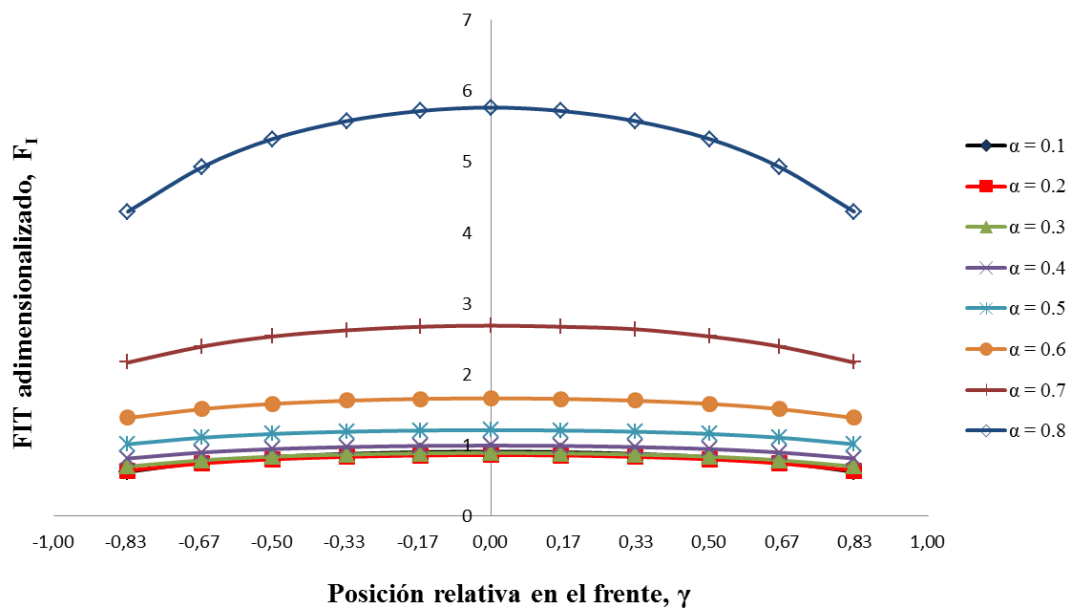


Figura 4.12: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.25$

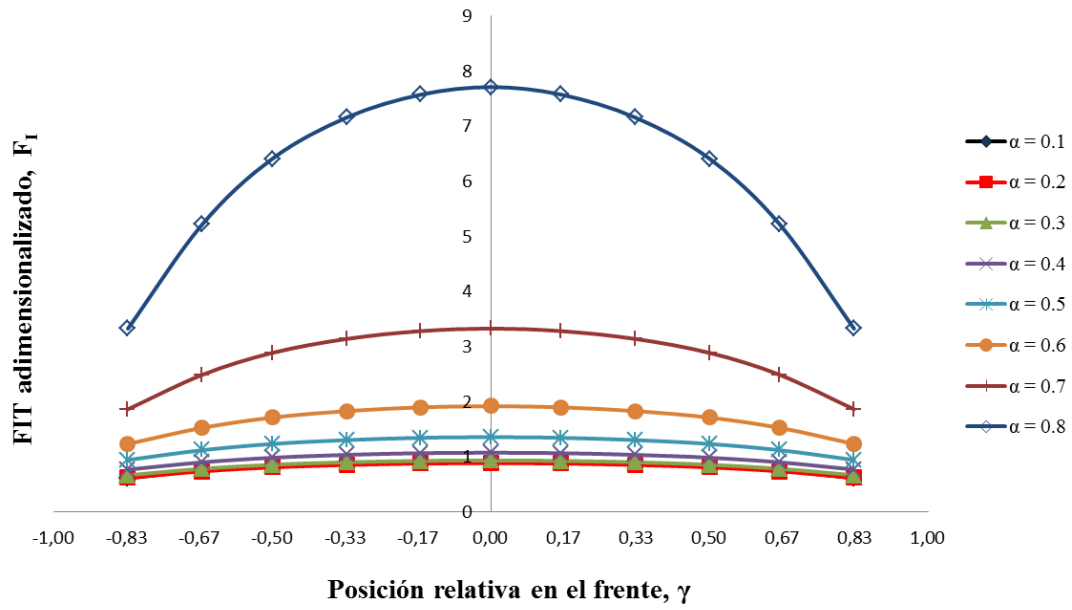


Figura 4.13: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.5$

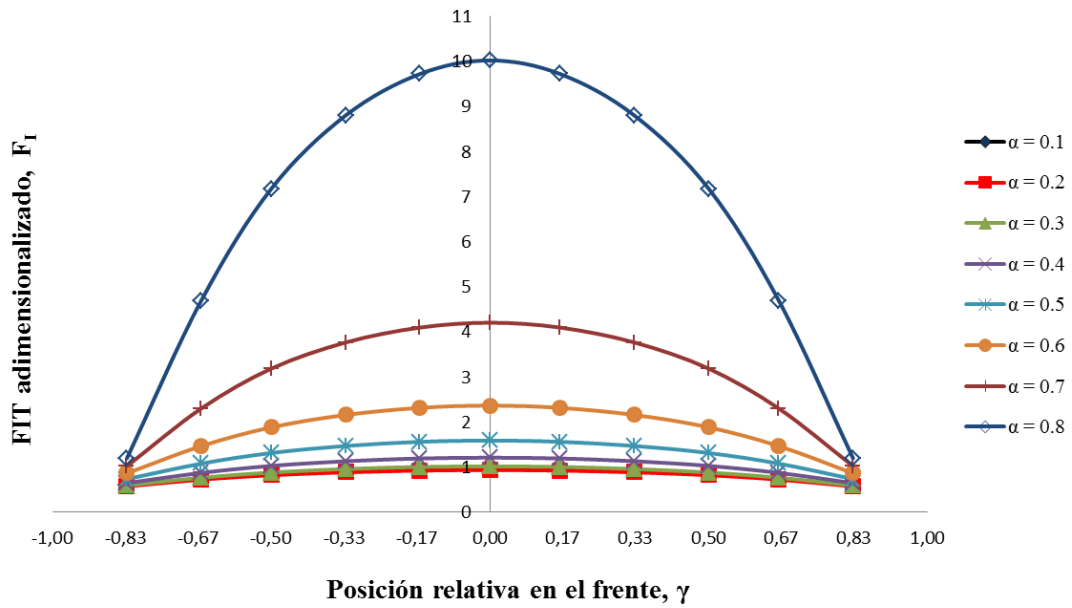


Figura 4.14: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 0.75$

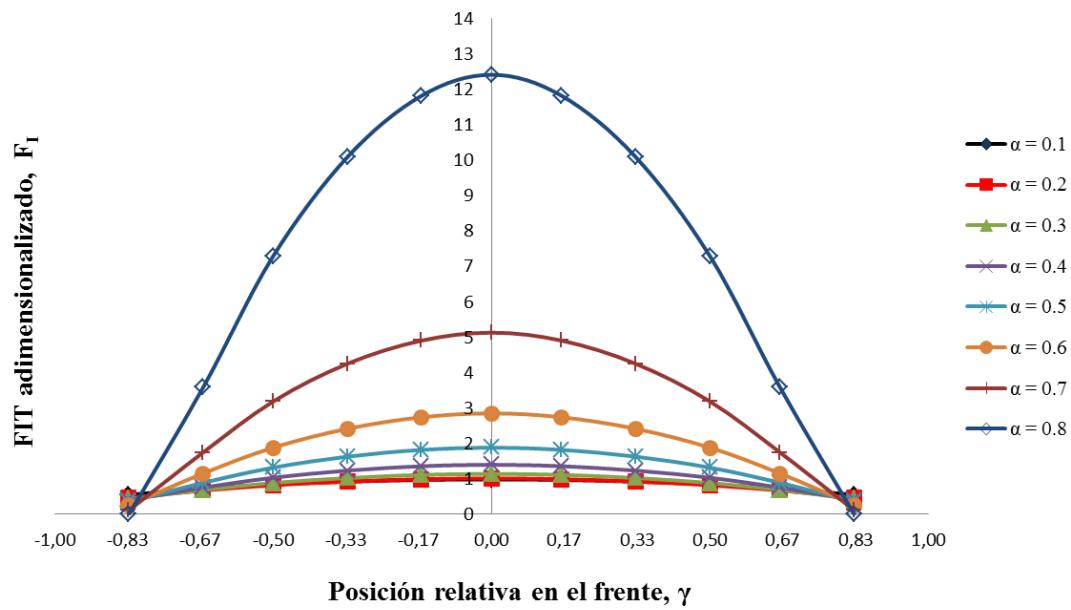


Figura 4.15: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores de profundidad y un factor de forma $\beta = 1$

En las figuras 4.16 a 4.18 se han representado los valores del FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente de la fisura para todos los valores del factor de forma β y una profundidad relativa α determinada. Con el fin de simplificar, en este caso se han elegido el primer y último valor de α y otro intermedio. No obstante, los resultados son extrapolables al resto de profundidades relativas.

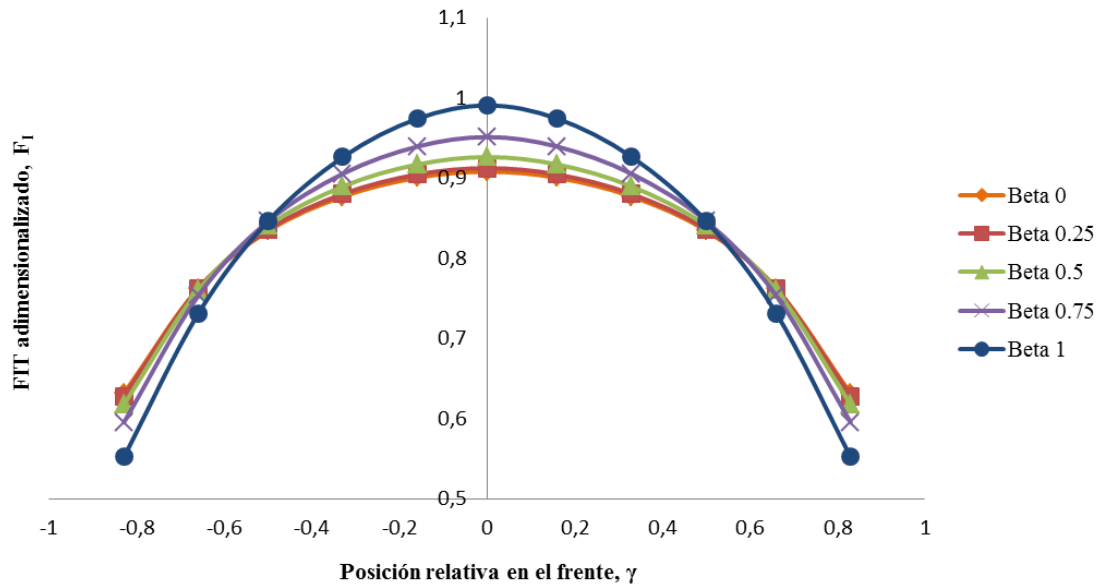


Figura 4.16: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.1$

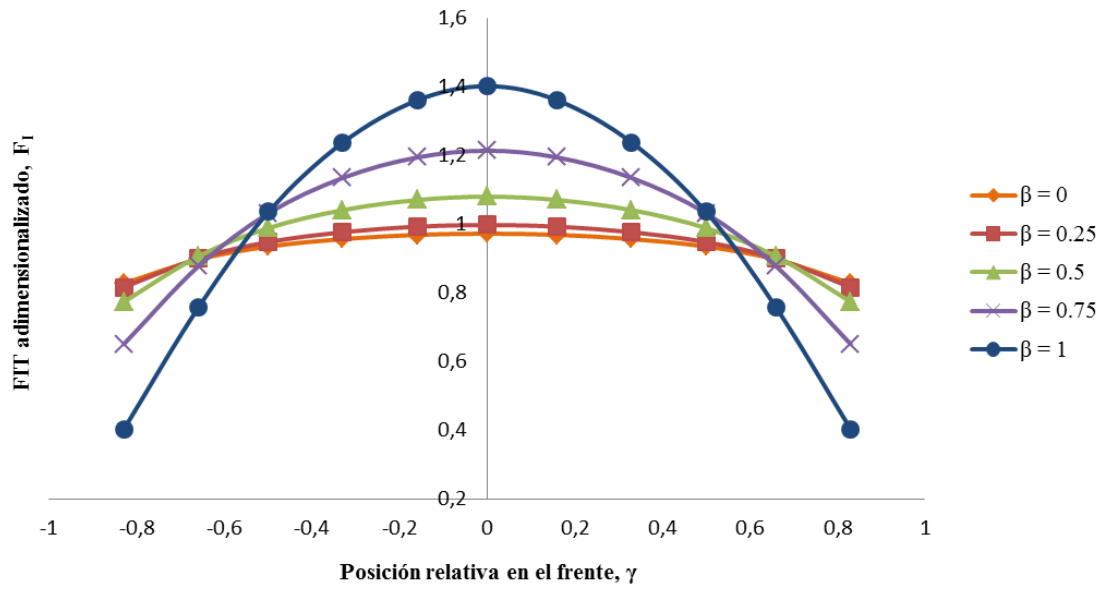


Figura 4.17: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.4$

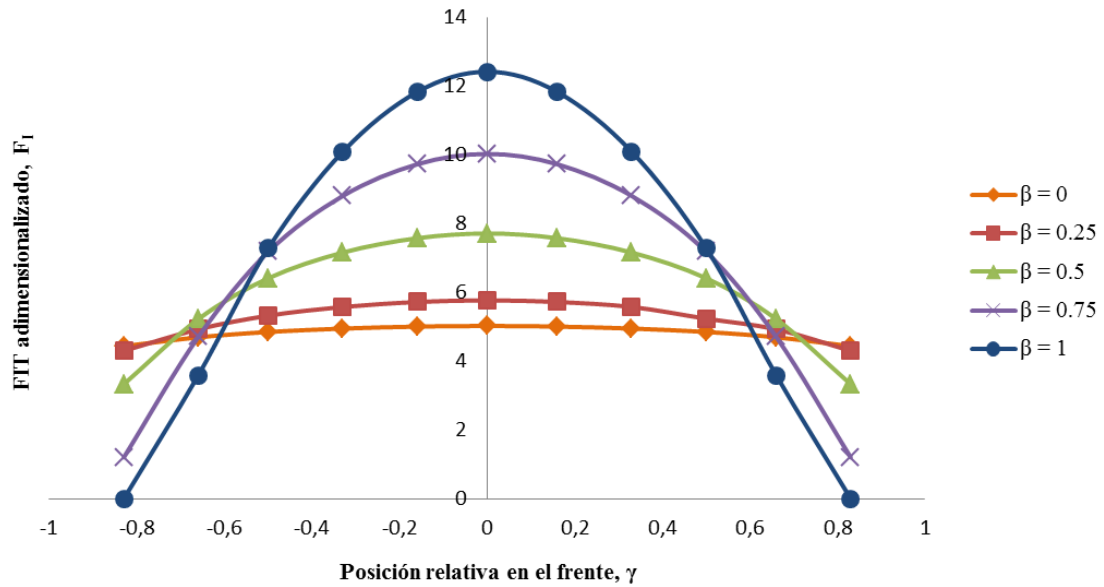


Figura 4.18: FIT adimensionalizado en función de la posición relativa en el frente para todos los valores del factor de forma y una profundidad $\alpha = 0.8$



Teniendo en cuenta los resultados representados en las figuras 4.11 a 4.18 se pueden realizar las siguientes conclusiones:

- El modelo de fisura completamente abierta proporciona siempre valores del FIT positivos, independientemente de la profundidad α y posición relativa γ o del factor de forma β escogidos.
- El modelo de fisura de frente recto, $\beta = 0$, posee la geometría menos curvada de todos los casos estudiados. Los valores del FIT para las diferentes profundidades permanecen prácticamente constantes a lo largo del frente de la fisura, por lo que esta se extenderá aproximadamente de la misma forma en todos los puntos del frente.
- Todas las curvas del FIT poseen forma cóncava y son simétricas. A medida que aumenta el factor de forma β , el valor del FIT en el punto central de la fisura es mayor; mientras que en los extremos sucede lo contrario, el valor del FIT disminuye según aumenta el factor de forma. Es decir, en cualquier caso la fisura se propagará antes por la zona central que por los extremos.
- En el caso de fisura de frente semicircular, $\beta = 1$, el valor del FIT en los extremos es nulo. Es decir, en dichos puntos la fisura no sufre propagación alguna.
- Tanto el aumento de la profundidad, α , como el del factor de forma, β , provocan el incremento del Factor de Intensidad de Tensiones en el punto central del frente de fisura y la reducción del mismo en los extremos del frente.

4.2.9 Validación del modelo

En este apartado, se procede a la validación de los resultados del Factor de Intensidad de Tensiones obtenidos mediante el módulo *crack* de Abaqus. En primer lugar, se comparan con los hallados por Shin y Cai [46] y, en segundo lugar, se contrastan con los del modelo de Carpinteri [11].

4.2.9.1 Shin y Cai [46]

En la investigación de Shin y Cai [46] se desarrolló un modelo numérico para obtener los valores del Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo del frente de una fisura semi-elíptica con forma convexa, en función de sus características y de la posición relativa en el frente de la misma. Además, se realizó un modelo analítico para obtener una expresión cerrada para el cálculo del FIT a partir de los resultados obtenidos en el modelo numérico.

Debido a que el trabajo de Shin y Cai [46] estudia fisuras de frente semielíptico con forma convexa, únicamente se podrán comparar los resultados para $\beta = 0$, es decir, para el caso de fisura de frente recto. En la figura 4.19 quedan representados los valores obtenidos del FIT por el presente modelo y los obtenidos por Shin y Cai [46].

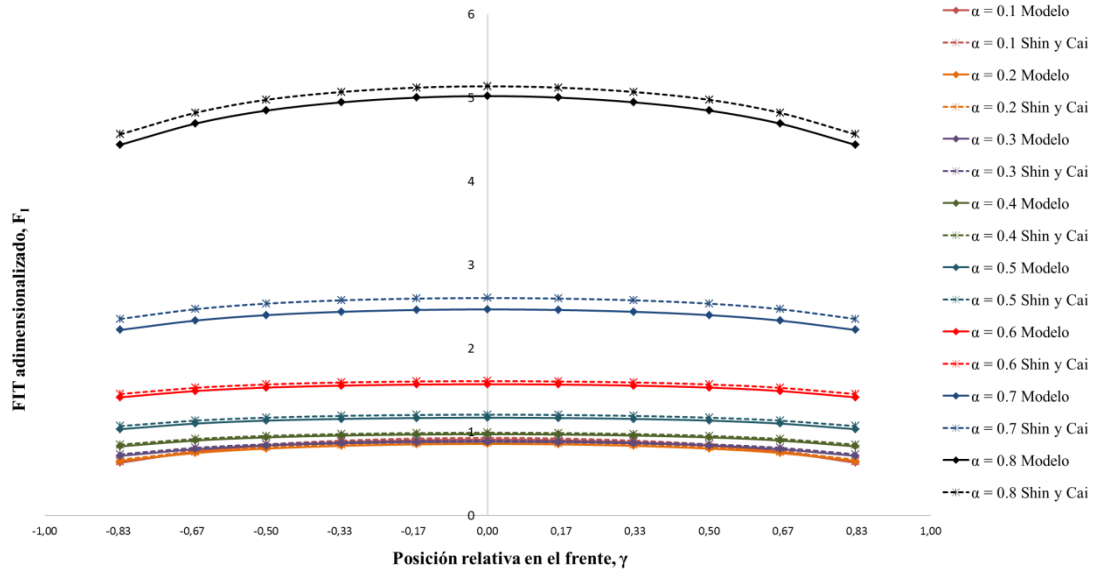


Figura 4.19: Comparación del FIT adimensionalizado del presente modelo y de Shin y Cai [46] en función de la posición relativa en el frente para $\beta = 0$ y todos los valores de profundidad de fisura

En la ilustración anterior se puede observar que los resultados entre ambos modelos son muy similares independientemente de los valores de la profundidad y posición relativa elegidos, siendo el error medio relativo de un 2.7 %. Al ser una gráfica realizada a escala, el error relativo que se aprecia para el caso de $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 0.8$ resulta elevado. Sin embargo, para estos casos dicho error no supera el 5 %.

4.2.9.2 Carpinteri [11]

Este autor desarrolló un estudio sobre el Factor de Intensidad de Tensiones en el punto central del frente de una fisura semielíptica con forma cóncava, contenida en un eje giratorio sometido a tracción y flexión. Los valores considerados por Carpinteri [11] en cuanto a profundidad relativa y factor de forma son los mismos que se han utilizado para este estudio. En la figura 4.20 se muestra una comparativa entre estos resultados, utilizando los valores del FIT de Carpinteri [11] referidos a flexión.

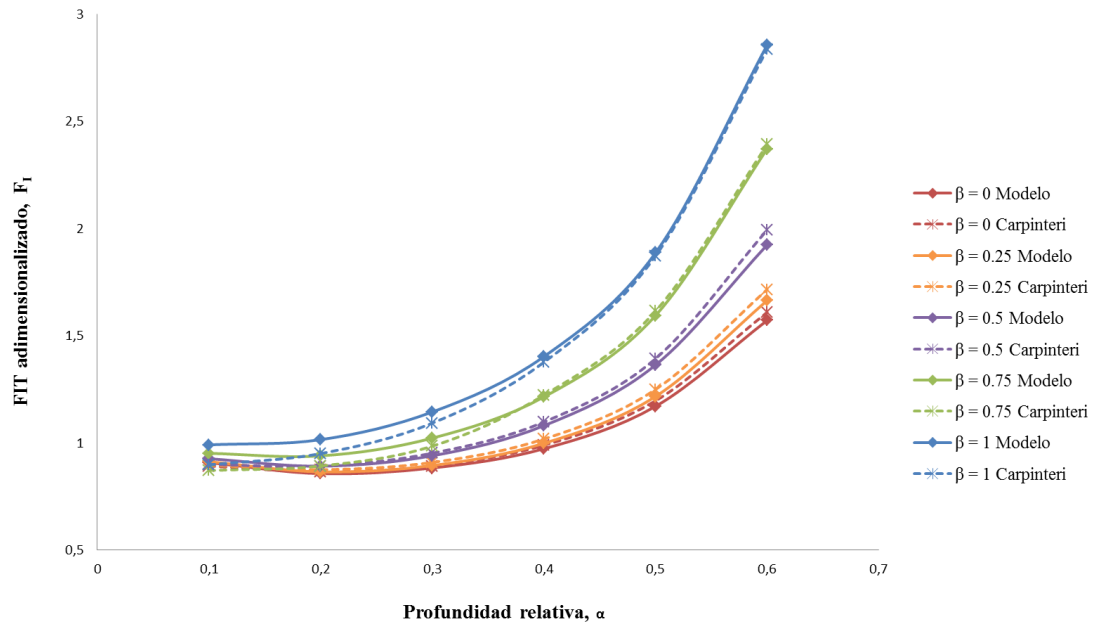


Figura 4.20: Comparación del FIT adimensionalizado del presente modelo y de Carpinteri [11] en función de la profundidad relativa para todos los valores del factor de forma

A la vista de estos resultados se puede afirmar que los valores del Factor de Intensidad de Tensiones proporcionados por el modelo numérico son válidos, dado que el error medio relativo no alcanza el 3 %. Centrando el espectro en los mayores valores de β (0.75 y 1) y en los menores de α (0.1 y 0.2), se puede observar una mayor discrepancia posiblemente debida al cómputo numérico y a las aproximaciones del método empleado.

5

EXPRESIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

En este capítulo se explica el método de obtención de la expresión que facilita el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en función de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente de la misma γ .

5.1 Obtención de la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones

El Factor de Intensidad de Tensiones para el caso de un eje con fisura semielíptica sometida a flexión puede expresarse como lo hace la ecuación 5.1.1 [48, 2].

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5.1.1)$$

En la expresión 5.1.1 F_I es el FIT adimensional, σ la tensión de referencia y a la profundidad de la fisura. Como se ha manifestado anteriormente, en el caso de ejes fisurados no rotatorios F_I depende únicamente de las características de la fisura (profundidad y forma) y de la posición relativa en el frente de la misma:

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (5.1.2)$$

En estas condiciones, se ha realizado un ajuste polinómico empleando la técnica de regresión múltiple mediante el *software* Matlab, teniendo en cuenta todos los valores obtenidos en las simulaciones numéricas de α , β y γ , consiguiendo el resultado de la expresión 5.1.3.

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^5 C_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \quad (5.1.3)$$

En la expresión 5.1.3 C_{ijk} son los coeficientes del ajuste, i el grado del polinomio de la variable α , j el grado del polinomio de β y k el grado del polinomio de γ .

Como se observa en la expresión 5.1.3, el mejor ajuste se ha obtenido con un polinomio de grado 4 para el parámetro β y de grado 5 para los parámetros α y γ , con un coeficiente de ajuste R^2 de valor 0.9996. En las tablas A.1 y A.2 del anexo se muestran los coeficientes del ajuste C_{ijk} .

5.2 Validación de la expresión del FIT

En este apartado se realiza una comparación entre los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos y la técnica de regresión múltiple con el fin de validar la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones. De la figura 5.1 a la 5.3 se muestran dichas comparaciones en función de la posición relativa en el frente para todos los casos de β y los correspondientes a una profundidad de fisura $\alpha = 0.1$; 0.4 y 0.8. Con el fin de simplificar la muestra, se han escogido el primer y último valor del intervalo y otro intermedio. A pesar de que el número de casos representados es finito, la metodología es extrapolable a cualquier



combinación de profundidad de fisura, forma del frente y posición relativa en el frente de la misma.

En estas ilustraciones se refleja la buena concordancia existente entre los resultados obtenidos a través de la expresión 5.1.3 y los obtenidos numéricamente, que como veremos en el apartado siguiente, el máximo error relativo entre ellos es inferior al 4 %.

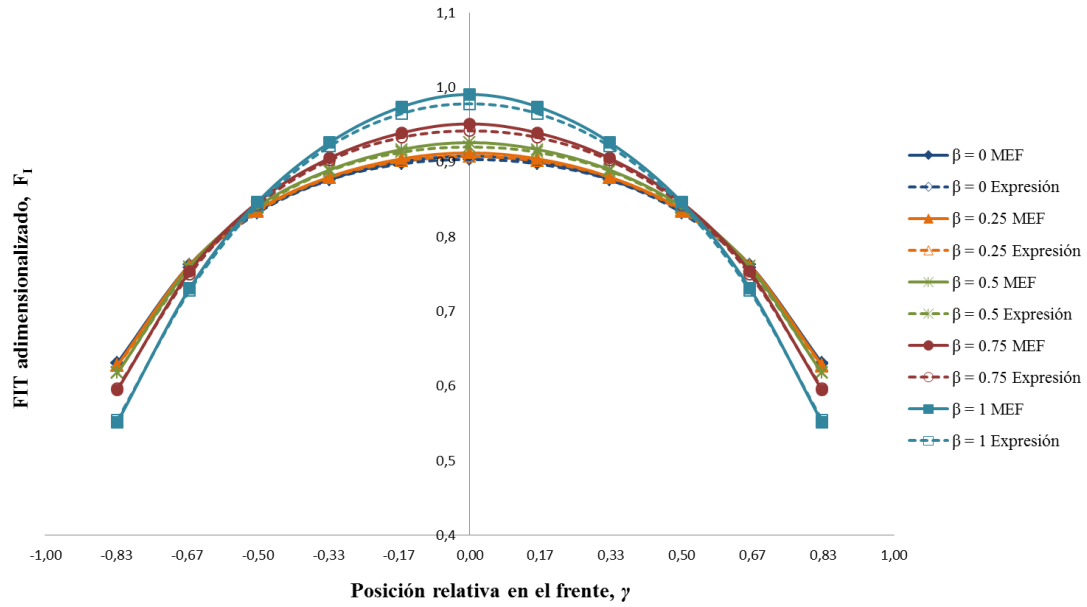


Figura 5.1: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.1$

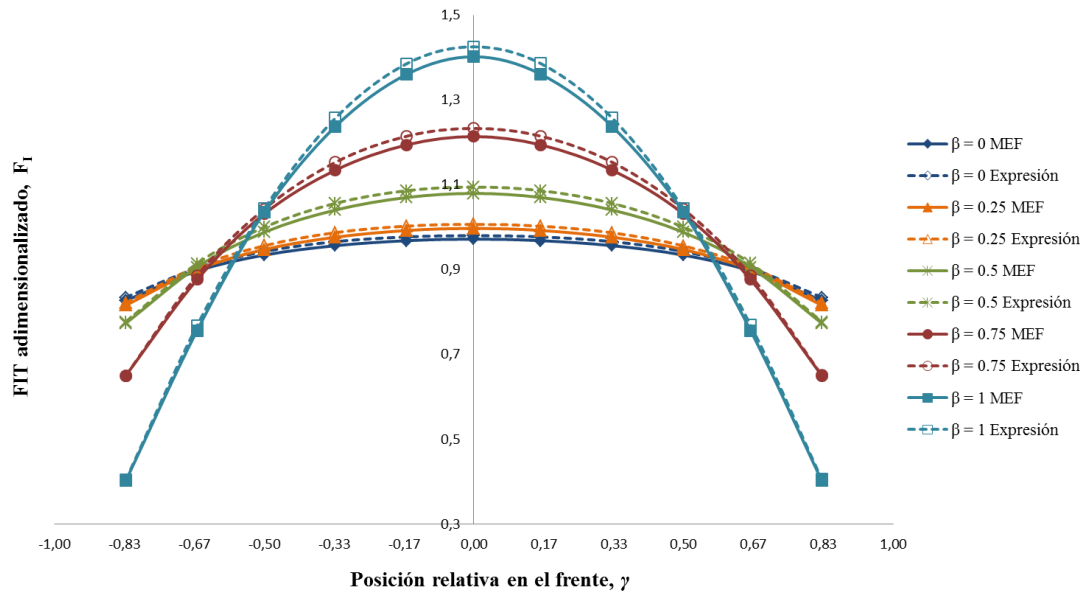


Figura 5.2: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.4$

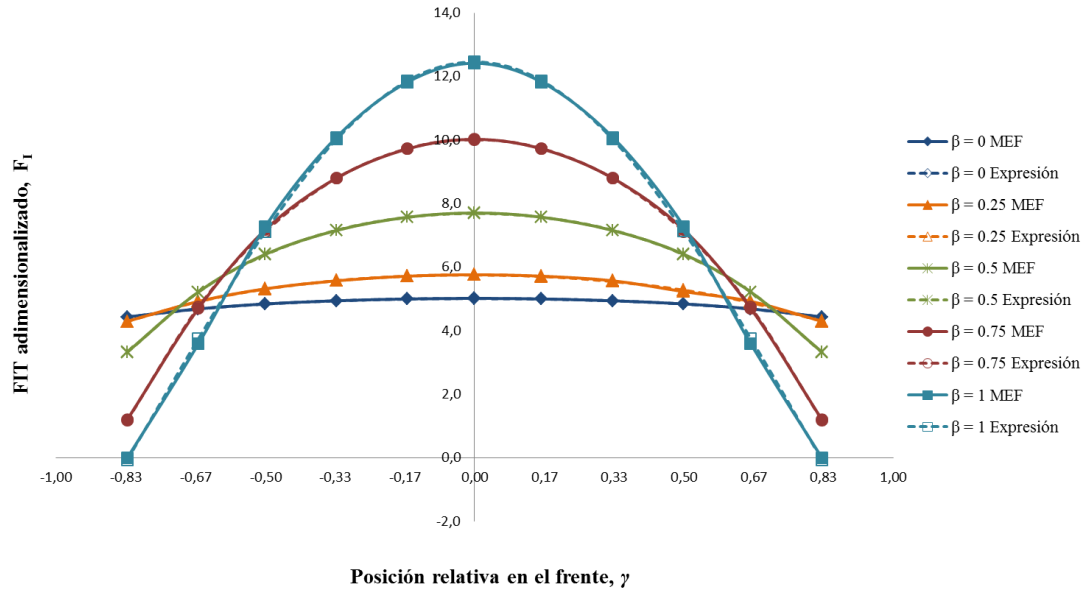


Figura 5.3: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante los resultados numéricos y la expresión, en función de la posición relativa en el frente para $\alpha = 0.8$

5.2.1 Error medio relativo

Con el fin de conocer el error cometido en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones, se ha evaluado el error medio relativo entre los resultados obtenidos a partir de la expresión 5.1.3 y los obtenidos numéricamente. Este cálculo se lleva a cabo empleando la expresión 5.2.1.

$$\bar{\varepsilon}_{F_I}(\%) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|F_{I,EXP}^i - F_{I,MEF}^i|}{F_{I,MEF}^i} \quad (5.2.1)$$

Donde $F_{I,EXP}$ es el valor del F_I obtenido mediante la expresión y $F_{I,MEF}$ el valor obtenido numéricamente.

La tabla 5.2.1 refleja el porcentaje del error medio efectuado en el cálculo del FIT teniendo en cuenta los valores de todas las posiciones relativas del frente para cada combinación α y β .



Tabla 5.2.1: Error medio relativo (%)

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$\alpha = 0,1$	0,30	0,29	0,31	0,50	0,67
$\alpha = 0,2$	1,41	1,57	1,59	2,15	2,45
$\alpha = 0,3$	2,44	2,61	2,65	3,53	3,95
$\alpha = 0,4$	0,89	0,91	1,14	1,15	1,33
$\alpha = 0,5$	1,37	1,59	1,27	1,95	2,17
$\alpha = 0,6$	1,60	1,76	1,47	2,10	2,85
$\alpha = 0,7$	0,53	0,57	0,47	0,75	3,84
$\alpha = 0,8$	0,05	0,26	0,11	0,65	1,72

Además, se ha analizado el promedio de las diferencias de los resultados de ambas técnicas haciendo uso de la expresión 5.2.2.

$$\bar{\delta}_{F_I} = \sum_{i=1}^n \frac{|F_{I,EXP}^i - F_{I,MEF}^i|}{n} \quad (5.2.2)$$

La tabla 5.2.2 muestra los resultados de los promedios entre los valores del F_I obtenido numéricamente y el estimado considerando los valores correspondientes a todas las posiciones relativas del frente para cada combinación de β y α .

Tabla 5.2.2: Promedio de las diferencias existentes entre el valor del F_I obtenido mediante el ajuste y el obtenido numéricamente

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$\alpha = 0,1$	0,0024	0,0024	0,0026	0,0042	0,0057
$\alpha = 0,2$	0,0112	0,0126	0,0135	0,0191	0,0220
$\alpha = 0,3$	0,0196	0,0211	0,0227	0,0316	0,0374
$\alpha = 0,4$	0,0083	0,0086	0,0116	0,0127	0,0146
$\alpha = 0,5$	0,0156	0,0186	0,0165	0,0283	0,0325
$\alpha = 0,6$	0,0240	0,0272	0,0257	0,0414	0,0501
$\alpha = 0,7$	0,0127	0,0146	0,0143	0,0231	0,0345
$\alpha = 0,8$	0,0026	0,0134	0,0069	0,0254	0,0935



En las tablas 5.2.1 y 5.2.2 se percibe que todos los errores medios relativos no superan el 4 % y todos los promedios de las diferencias son inferiores a 0.1. De este modo, se puede afirmar que el modelo ofrece muy buenas estimaciones del Factor de Intensidad de Tensiones, cuyas desigualdades se deben a posibles errores en el cómputo numérico.

6 PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

En este capítulo se presenta la planificación llevada a cabo y el presupuesto empleado para el desarrollo del proyecto.

6.1 Planificación

Para la realización de cualquier proyecto es necesario construir una buena planificación acorde a sus necesidades, costes y plazos. Esta planificación contendrá todas las tareas del proyecto divididas en diferentes fases, indicando el intervalo de tiempo necesario para su desarrollo. Gracias a dicha planificación, se evitarán retrasos en los plazos fijados y se fomentará la creación de un presupuesto más exacto.

Por todo ello, se considera importante presentar la planificación temporal de esta investigación, desglosando las distintas tareas que dividen el proyecto según las áreas de trabajo (ver tabla 6.1.1).

Tabla 6.1.1: Planificación de tareas

PLANIFICACIÓN DE TAREAS				
Nombre de la tarea	Fecha de comienzo	Fecha de finalización	Horas dedicadas	Días dedicados
Deliberaciones iniciales				
-Búsqueda de proyecto y alternativas	24/06/2014	10/09/2014	30	15
-Selección del proyecto	11/09/2014	11/09/2014	5	1
Desarrollo y análisis de los modelos a estudiar				
-Creación de modelos	01/10/2014	20/12/2014	120	40
-Pruebas y alternativas de diseño	23/12/2014	01/02/2015	100	35
-Ejecución de los modelos	05/02/2015	25/04/2015	150	80
-Análisis de resultados	10/03/2015	30/04/2015	60	30
Redacción de la memoria				
-Estudio teórico de la Mecánica de la Fractura	15/12/2014	10/01/2015	60	15
-Estudio teórico de las diferentes tipologías de fisuras	25/12/2014	25/01/2015	20	15
-Investigación sobre trabajos que estudian el FIT en fisuras	18/01/2015	10/02/2015	50	10
-Conceptos básicos del MEF	20/01/2015	01/02/2015	30	5
-Funcionamiento del software Abaqus 6.11	02/02/2015	08/02/2015	20	5
-Modelo numérico	01/04/2015	05/05/2015	60	30
-Expresión del FIT	11/05/2015	30/05/2015	30	10
-Planificación y presupuesto	01/06/2015	16/06/2015	20	10
-Maquetación	01/05/2015	16/06/2015	40	30
Total			795	

A partir de la planificación de tareas de la tabla 6.1.1, se ha desarrollado el diagrama de Gantt correspondiente mediante el programa Microsoft Office Excel, con el fin de reducir los costes en las licencias de los *softwares*. En la figura 6.1 queda reflejado dicho diagrama según la secuencia de las tareas y las relaciones de precedencia que las definen.

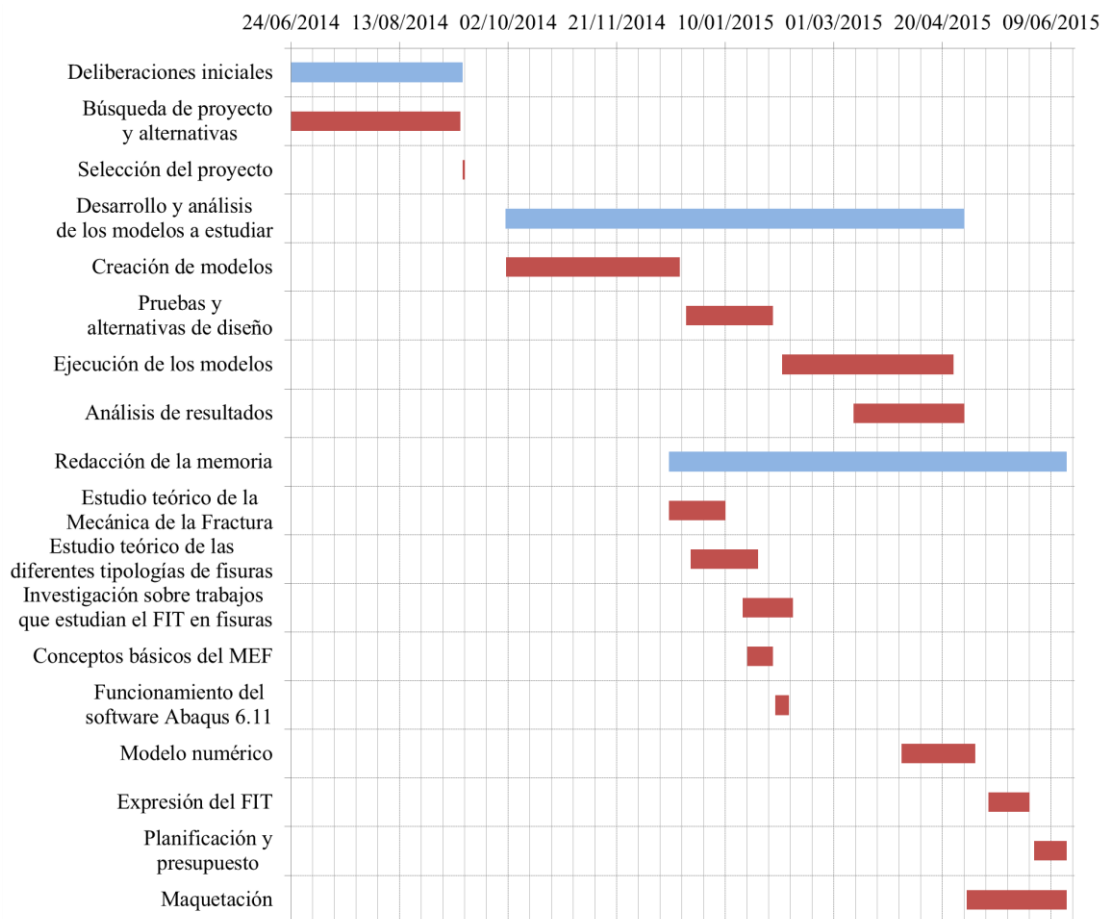


Figura 6.1: Diagrama de Gantt correspondiente a las tareas planificadas

6.2 Prepuesto

Para el presupuesto de este proyecto se han tenido en cuenta la amortización de los equipos, las licencias de los *softwares* utilizados y el coste del personal involucrado en el desarrollo del presente trabajo.

6.2.1 Amortización de equipos y licencias de *software*

Para calcular la amortización de los equipos y licencias de los *softwares* utilizados se emplea la ecuación 6.2.1, donde A es el número de meses de disfrute del equipo o programa, B el período de depreciación, C el coste del equipo o licencia y D el porcentaje de utilización.

$$C_{amort} = \frac{A}{B} \cdot C \cdot D \quad (6.2.1)$$

La tabla 6.2.1 refleja la información referente a la amortización de equipos y licencias de los *softwares* empleados.

Tabla 6.2.1: Coste de amortización de equipos y licencias utilizados

COSTE DE AMORTIZACIÓN					
	A (meses)	B (meses)	C (€)	D (%)	C_{amort} (€)
Licencias de <i>software</i>					
-Abaqus 6.11	6	12	33.650	100	16.825
-Matlab	1	12	2.000	100	167
-Paquete Microsoft Office 2010	6	12	100	100	50
-Notepad	6	-	-	100	0
Equipo					
-PC laboratorio	6	12	2000	100	1.000
-PC personal	4	12	2000	100	667
-Disco duro	6	12	100	100	50
				Total	18.758

6.2.2 Retribución del personal

La tabla 6.2.2 presenta la información contable del coste del personal.

Tabla 6.2.2: Coste del personal involucrado en el proyecto

COSTE DE PERSONAL				
Personal	Cargo	Horas dedicadas	Coste (€/h)	C_{pers} (€)
Tutora	Doctora	120	45	5.400
Autora	Estudiante	795	15	11.925
			Total	17.325



Por lo tanto, el coste total del proyecto queda reflejado en la ecuación 6.2.2.

$$C_{total} = C_{amort} + C_{pers} = 18.758 + 17.325 = 36.083 \text{ €} \quad (6.2.2)$$

7

CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este capítulo se exponen las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de la presente investigación y las posibles líneas de trabajo futuro.

1.1 Resumen final y conclusiones

A partir de los objetivos expuestos en este Trabajo Fin de Grado, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Se ha realizado un estudio pormenorizado del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) a lo largo del frente de una fisura semielíptica con forma cóncava contenida en un eje estático sometido a flexión, considerando cuarenta geometrías diferentes de frente de fisura: ocho profundidades relativas α y cinco factores de forma β . Para ello, se ha desarrollado un modelo numérico simulando el problema planteado mediante el Método de Elementos Finitos empleando el código comercial Abaqus 6.11. Los resultados del FIT obtenidos a lo largo del frente de fisura se han analizado y comparado con los expuestos por diferentes autores de la literatura.
- Se ha observado que el modelo de fisura completamente abierta proporciona siempre valores positivos del FIT, independientemente de la forma o tamaño de la grieta y de la posición relativa en el frente de la misma. Además, las curvas que determinan los valores del FIT a lo largo del frente de fisuras semielípticas de forma cóncava son simétricas y poseen forma cóncava en cualquier caso. A medida que aumenta el factor de forma β o la profundidad α , se observa que el valor del FIT en el punto central de la fisura es mayor; mientras que en los extremos sucede lo contrario, el valor del FIT disminuye según aumentan estos parámetros. Considerando lo anterior, se puede afirmar que tanto el aumento del factor de forma β como el de la profundidad α , originan el incremento del valor del FIT en el punto central del frente y la disminución del mismo en los extremos. Por lo tanto, la fisura se propagará antes por la zona central que por los extremos en cualquiera de los casos.
- A partir de los resultados obtenidos en el modelo numérico anterior, se ha desarrollado una expresión realizando un ajuste polinómico con el fin facilitar el cálculo del FIT en función de las características de fisura, forma y tamaño, y de la posición relativa en el frente. Los resultados obtenidos se han validado realizando una comparación con los obtenidos mediante el MEF, logrando un error medio relativo muy pequeño.

Por lo tanto, dada la coherencia de los resultados obtenidos mediante el modelo numérico y el analítico, se puede concluir que ambos modelos proporcionan resultados muy satisfactorios.

1.2 Trabajos futuros

A medida que fue desarrollándose el presente trabajo, surgieron nuevas propuestas que se podrán tener en cuenta para trabajos futuros:

- Análisis mediante el Método de Elementos Finitos del problema planteado variando los parámetros característicos de las fisuras semielípticas α , β y γ .
- Realizar un modelo numérico considerando el giro del eje para diferentes posiciones angulares y, así, obtener un modelo de apertura y cierre de fisuras semielípticas de forma cóncava.
- Desarrollar un modelo analítico para facilitar el cálculo del FIT teniendo en cuenta el comportamiento giratorio del eje. Es decir, se estudiará una expresión con cuatro variables α , β , γ y θ .
- Analizar la propagación de fisuras semielípticas de forma cóncava a partir de los resultados obtenidos para el Factor de Intensidad de Tensiones, considerando pequeñas posiciones angulares del giro del eje, θ , y variando los parámetros característicos α , β y γ .
- Realizar un estudio experimental basado en la propagación de fisuras y en el comportamiento de ejes fisurados tanto estáticos como giratorios.

Bibliografía

- [1] Anglada, M. (2002). In Universidad Politécnica de Cataluña (Ed.), *Fractura de materiales* (1ª ed.). Barcelona.
- [2] Arana, J., & González, J. (2002). Mecánica de fractura. Universidad del País Vasco.
- [3] Athanassiadis, A., Boissknot, J., Brevet, P., François, D., & Raharinaivo, A. (1981). Linear elastic fracture mechanics computations of cracked cylindrical tensioned bodies. *International Journal of Fracture*, 17, 553-566.
- [4] Bergman, M. (1995). Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 18, 1155-1172.
- [5] Blackburn, W. (1976). Calculation of stress intensity factors for straight cracks in grooved and ungrooved shafts. *Engineering Fracture Mechanics*, 8, 731-736.
- [6] Bush, A. (1976). Experimentally determined stress-intensity factors for single-edge-crack round bars loaded in bending. *Experimental Mechanics*, 16, 249-257.
- [7] Carnicero, A. Introducción al método de elementos finitos.
- [8] Carpinteri, A. (1992). Elliptical-arc surface cracks in round bars. *Fatigue Fracture of Engineering Materials*, 15, 1141-1153.
- [9] Carpinteri, A. (1992). Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars. *Engineering Fracture Mechanics*, 42, 1035-1040.



- [10] Carpinteri, A., Brighenti, R. (1996). Part-through cracks in round bars under cyclic combined axial and bending loading. *International Journal of Fatigue*, 18, 33-39.
- [11] Carpinteri, A., Vantadori, S. (2009). Sickle-shaped cracks in metallic round bars under cyclic eccentric axial loading. *International Journal of Fatigue*, 31, 759-765.
- [12] Carpinteri, A., Vantadori, S. (2009). Sickle-shaped surface crack in a notched round bar under cyclic tension and bending. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 32, 223-232.
- [13] Caspers, M., Mattheck, C., Munz, D. (1986). Fatigue crack propagation in cylindrical bars. *Materialwissenschaft Und Werkstofftechnik*, 17, 327-333.
- [14] Cheng, L., Li, N., Chen, X., Hea, Z. (2011). The influence of crack breathing and imbalance orientation angle on the characteristics of the critical speed of a cracked rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 2031-2048.
- [15] Coker, E., Filon, L. (1957). *A treatise on photo-elasticity*. University Press.
- [16] Couroneau, N., Royer, J. (1998). Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I. *International Journal of Fatigue*, 20, 711-718.
- [17] Cueto-Felgueroso, C. (2001). Implantación del método de cálculo de la integral J sobre un dominio. *Anales De La Mecánica De La Fractura*, 18.
- [18] D.S., S. *Abaqus 6.11*. Visto el 06/01/2015 en <http://abaqus.ethz.ch:2080/v6.11/books/usi/default.htm>
- [19] D.S., S. *Abaqus theory manual*. Visto el 06/01/2015 en <http://www.3ds.com/products-services/simulia/>
- [20] Dimarogonas, A., Papadopoulos, C. (1983). Vibration of cracked shafts in bending. *Journal of Sound and Vibration*, 91, 583-593.
- [21] EFO. (2015,). Elementos finitos online. Visto el 06/01/2015 en <http://www.elementosfinitosonline.es/enlaces/abaqus-fea/>



- [22] Fonte, M., Freitas, M. (1999). Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in round bars under bending and torsion. *International Journal of Fatigue*, 21, 457-463.
- [23] Forman, R., Shivakumar, V. (1986). Growth behavior of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders. *Fracture Mechanics*, 905, 59-74.
- [24] Frías, E. (2004). Aportaciones al estudio de las máquinas eléctricas de flujo axial mediante la aplicación del método de elementos finitos. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [25] González, J. (2004). *Mecánica de fractura* (2ª ed.). México: Limusa.
- [26] Griffith, A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions*, 221, 163-198.
- [27] Irwin, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 24, 361-364.
- [28] Ismail, A., Ariffin, A., Adbullah, S., & Ghazali, M. (2012). Stress intensity factors for surface cracks in round bar under single and combined loadings. *Meccanica*, 47, 1141-1156.
- [29] Johnson, R. (1972). *Fracture of a cracked solid circular cylinder*. University of Wisconsin.
- [30] Levan, A., Royer, J. (1993). Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting. *International Journal of Fracture*, 61, 71-99.
- [31] Lorentzen, T., Kjaer, N., Henriksen, T. (1986). The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts. *Engineering Fracture Mechanics*, 23, 1005-1014.
- [32] Mayes, I., Davies, W. (1984). Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design*, 106, 139-145.



- [33] Muñoz-Abella, B., Rubio, L. Detección e identificación de fisuras de frente semielíptico en ejes mediante la aplicación de algoritmos genéticos. *Asociación Española De Ingeniería Mecánica*.
- [34] Muñoz-Abella, B., Rubio, L., Rubio, P., Montero, L. Flexibilidad de ejes rotativos con fisuras semielípticas. *Asociación Española De Ingeniería Mecánica*.
- [35] Orowan, E. (1954). In Department of Mechanical Engineering (Ed.), *Energy criteria of fracture*.
- [36] Ouchterlony, F. (1981). Extension of the compliance and stress intensity formulas for the single edge crack round bar in bending. *Fracture Mechanics for Ceramics, Rocks and Concrete*, 145, 237-256.
- [37] Papadopoulos, C., Dimarogonas, A. (1987). Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of Sound and Vibration*, 117, 81-93.
- [38] Papadopoulos, C., Dimarogonas, A. (1988). Coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design*, 110, 1-8.
- [39] Paris, P., Erdogan, F. (1963). A critical analysis of crack propagation laws. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 85, 528-534.
- [40] Paris, P., Gómez, M., Anderson, W. (1961). A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13, 9-14.
- [41] Raju, I., Newman, J. (1986). Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods. *Fracture Mechanics: Seventeenth Volume, ASTM STP 905*, 17, 789-805.
- [42] Rubio, L., Montero, L., Muñoz-Abella, B., Rubio, P. (2012). Efecto de la presencia y orientación de una masa excéntrica en la forma del frente de una fisura de un eje rotatorio. *Anales De Ingeniería Mecánica*, 19.



- [43] Rubio, P. (2014). Factor de intensidad de tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios. Universidad Carlos III de Madrid.
- [44] Shih, Y., Chen, J. (1997). Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft. *International Journal of Fracture*, 19, 477-485.
- [45] Shih, Y., Chen, J. (2002). The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft. *Nuclear Engineering and Design*, 214, 137-145.
- [46] Shin, C., Cai, C. (2004). Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. *International Journal of Fracture*, 129, 239-264.
- [47] Silva-Moreno, A., Rodríguez, F., Torres, R., Ochoa, N. (2006). Photoelasticity applied in industry. *Fifth Symposium Optics in Industry*.
- [48] Tada, H., Irwin, G., Paris, P. (1985). In Paris Productions Incorporated (Ed.), *The stress analysis of crack handbook* (2ª ed.)
- [49] Uzcátegui, M. Abaqus programa de elementos finitos. *Centro Nacional De Cálculo Científico Universidad De Los Andes*.
- [50] Valiente, A. (1980). Criterios de fractura para alambres. Universidad Politécnica de Madrid.

A COEFICIENTES DEL AJUSTE POLINÓMICO

En el presente Anexo se muestran los coeficientes C_{ijk} utilizados en el apartado 5.1 para el cálculo de los ajustes.

Tabla A.1: Coeficientes C_{ijk} de la ecuación 5.1.3

k = 0						
i	j	0	1	2	3	4
0		0,4875	-0,6294	0,4064	-3,2428	2,0759
1		9,4830	11,4342	1,9751	50,1501	-34,2098
2		-74,6025	-66,0138	-101,7651	-198,8668	164,7026
3		248,3798	153,4645	651,3657	72,5478	-242,4057
4		-365,8062	-142,0032	-1412,5163	692,4108	-48,3627
5		205,5437	37,6398	1000,8080	-754,5669	211,7913

k = 1						
i	j	0	1	2	3	4
0		0,0002	1,4244	-6,1846	8,5633	-3,8024
1		-0,0012	-28,4193	123,4194	-171,0350	76,0250
2		0,0002	192,1328	-834,3504	1156,6009	-514,3335
3		0,0118	-570,5779	2477,4128	-3434,5284	1527,5815
4		-0,0245	763,5559	-3314,7462	4595,2807	-2043,9624
5		0,0145	-375,0129	1627,7396	-2256,4368	1003,6576

k = 2						
i	j	0	1	2	3	4
0		-0,2157	2,4339	-8,1080	14,9954	-5,1173
1		-0,7368	-48,0285	154,4174	-289,8887	94,2611
2		9,4266	326,6910	-1039,5254	1955,5829	-634,2120
3		-32,9586	-976,8284	3006,8426	-5721,0236	1784,8208
4		50,8222	1323,8809	-3905,5388	7553,8428	-2240,8577
5		-29,8109	-664,9542	1848,9177	-3688,0599	1016,0860

Tabla A.2: Continuación coeficientes C_{ijk} de la ecuación 5.1.3**k = 3**

i	j	0	1	2	3	4
0		0,0012	-3,7715	16,3692	-22,6579	10,0569
1		-0,0211	74,7819	-324,9914	450,6514	-200,3945
2		0,1275	-500,0042	2173,7802	-3016,3124	1342,2937
3		-0,3414	1461,6847	-6354,7701	8819,6861	-3926,0042
4		0,4165	-1915,3652	8326,0826	-11555,8189	5144,4539
5		-0,1889	914,9745	-3976,7434	5519,0415	-2456,9982

k = 4

i	j	0	1	2	3	4
0		-0,3794	-4,5817	24,3150	-29,1518	7,2788
1		1,4279	91,0277	-482,5878	569,7931	-132,5685
2		-0,8874	-622,1710	3293,9067	-3841,2626	849,3060
3		-9,4784	1873,6263	-9889,1298	11278,5935	-2255,9302
4		22,1273	-2556,8488	13441,9982	-14891,1075	2556,1960
5		-14,5266	1282,7155	-6701,4332	7070,2149	-869,4949

k = 5

i	j	0	1	2	3	4
0		-0,0032	2,3887	-10,3261	14,2595	-6,3171
1		0,0465	-46,9954	204,0124	-282,8193	125,7355
2		-0,2465	309,4811	-1345,7990	1868,6919	-832,0334
3		0,6031	-884,4633	3848,8105	-5347,8440	2382,6944
4		-0,6890	1122,6893	-4886,7860	6792,0216	-3027,0819
5		0,2971	-512,8212	2232,4716	-3103,3668	1383,3587